メッセージ伝播復調法の課題と展望

CS研究会　特別招待講演
2024年3月14日

豊橋技術科学大学
電気･電子情報工学系
准教授　竹内啓悟

大規模MIMOアップリンク

N人のユーザから単一基地局への無線伝送モデル

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_M)$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_M)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^M$: M次元受信ベクトル

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$: N次元送信ベクトル

$\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_M)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^M$: M次元ノイズベクトル

$\boldsymbol{A} = [A_{mn}] \in \mathbb{R}^{M \times N}$: M行N列の通信路行列

復調問題の目的

受信ベクトル$\boldsymbol{y}$と通信路行列$\boldsymbol{A}$に関する情報を使って、最小限の計算量かつベイズ最適な性能で送信ベクトル$\boldsymbol{x}$を推定せよ。

メッセージ伝播法のまとめ

アルゴリズム	計算量	通信路行列	性能
近似的メッセージ伝播法 (AMP) [1]	$\mathcal{O}(tMN)$ t: 反復回数	i.i.d.ガウス	最適
直交/ベクトルAMP (OAMP [2]/VAMP [3])	$\mathcal{O}(tMN + M^3 + M^2N)$	右直交不変	最適
畳み込みAMP (CAMP) [4]	$\mathcal{O}(tMN)$	右直交不変	最適?
メモリAMP (MAMP) [5]	$\mathcal{O}(tMN)$	右直交不変	最適?

[1] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, “Message-passing algorithms for compressed sensing,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 106, no. 45, pp. 18 914–18 919, Nov. 2009.

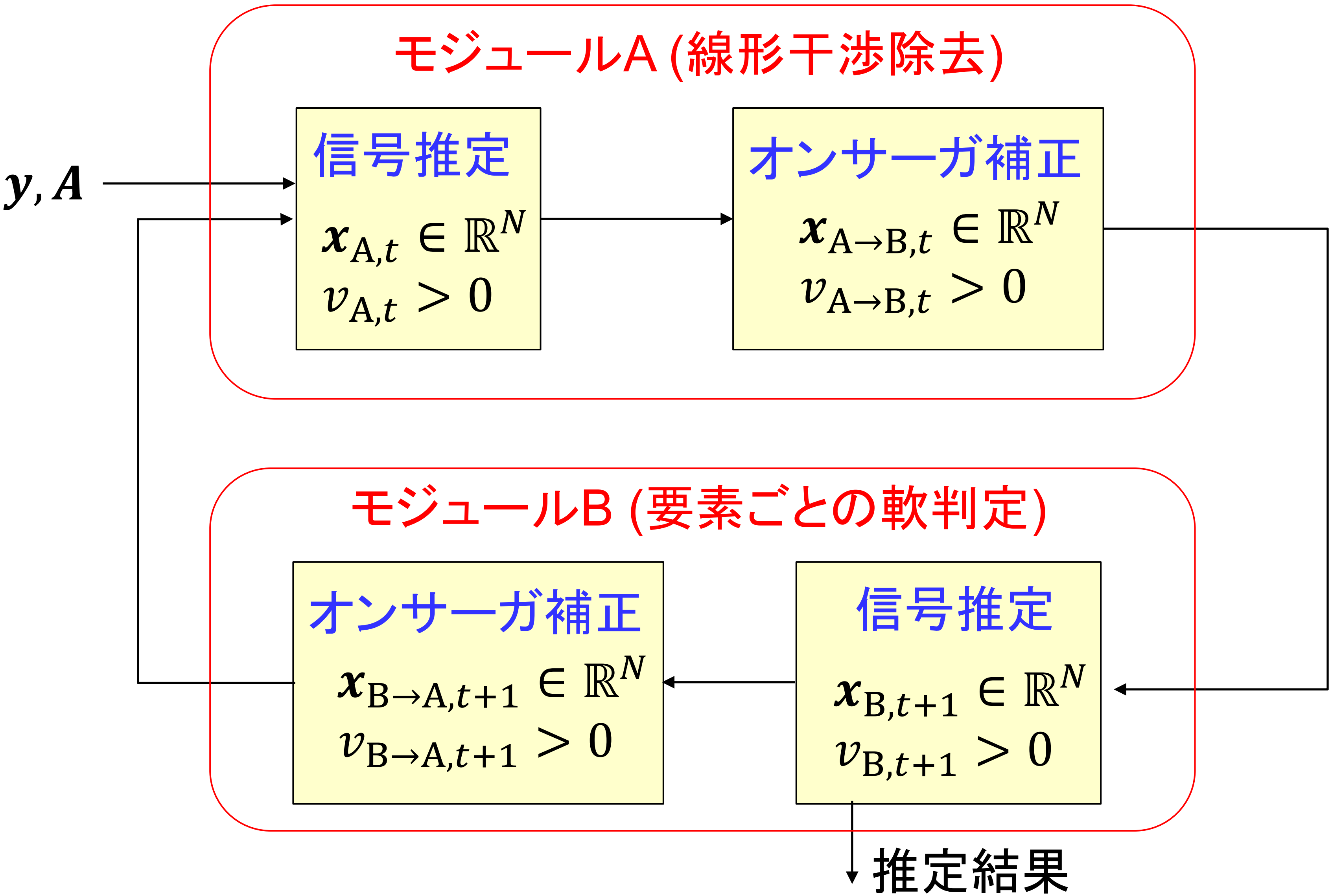
[2] J. Ma and L. Ping, “Orthogonal AMP,” *IEEE Access*, vol. 5, pp. 2020–2033, Jan. 2017.

[3] S. Rangan, P. Schniter, and A. K. Fletcher, “Vector approximate message passing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 65, no. 10, pp. 6664–6684, Oct. 2019.

[4] K. Takeuchi, “Bayes-optimal convolutional AMP,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 67, no. 7, pp. 4405–4428, Jul. 2021.

[5] L. Liu, S. Huang, and B. M. Kurkoski, “Memory AMP,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 68, no. 12, pp. 8015–8039, Dec. 2022.

従来型メッセージ伝播法の概要



近似的メッセージ伝播法[1]

モジュールA（整合フィルタ推定）

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_t, \qquad \boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t} + \frac{N v_{\mathrm{B},t}}{M v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t-1}}\boldsymbol{z}_{t-1}.$$

$$v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \sigma^2 + \frac{N}{M} v_{\mathrm{B},t},$$

オンサーガ補正

モジュールB（要素ごとの軟判定）

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1} = \mathbb{E}[\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}, v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}],$$

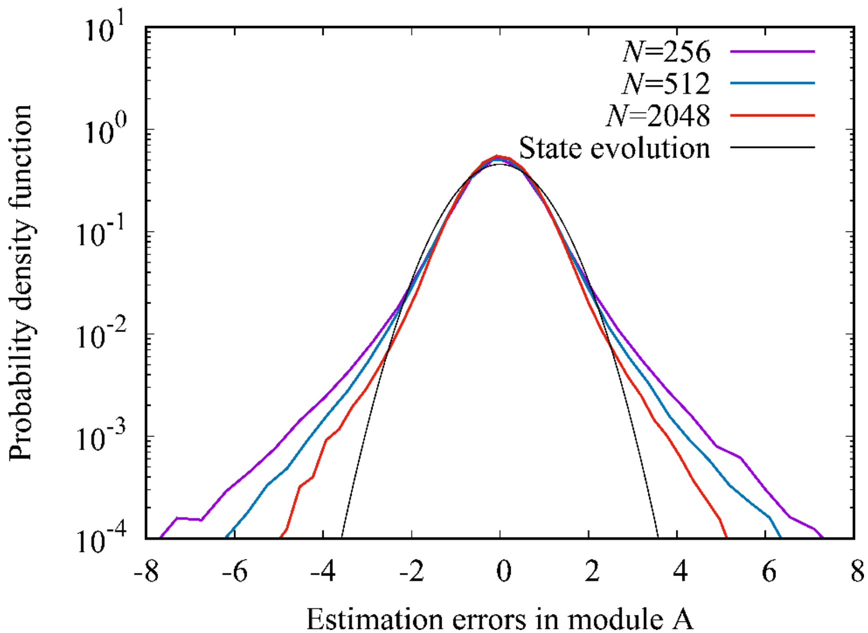
$$v_{\mathrm{B},t+1} = \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1}\right\|^2 | \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}, v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}\right]$$

仮想的なガウス通信路

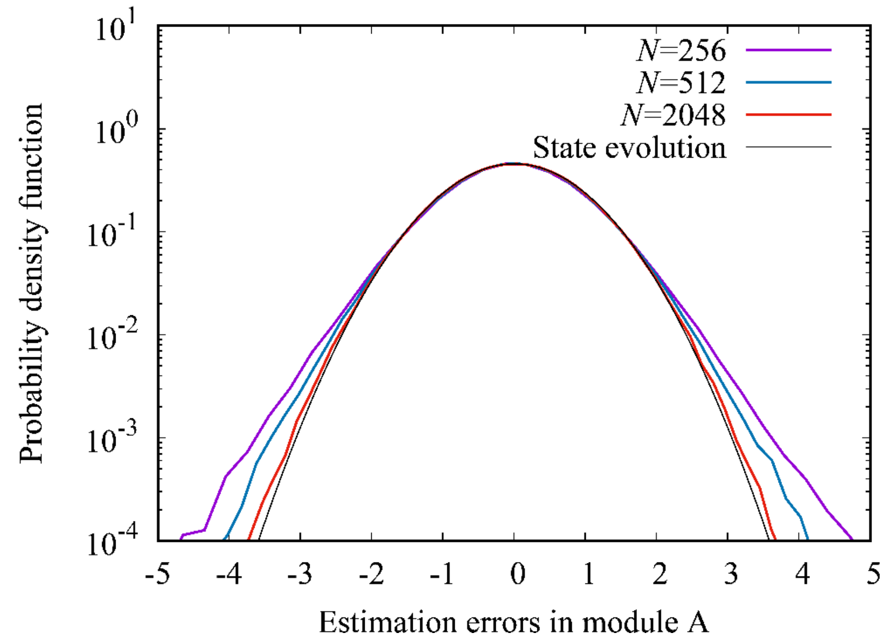
$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}_t, \qquad \boldsymbol{h}_t \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{0}, v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}\boldsymbol{I}_N\right).$$

推定誤差$\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} - \boldsymbol{x}$がガウス分布することを想定

オンサーガ補正の効果



補正なし



補正あり

圧縮比	$M/N = 0.5$
送信信号	信号密度0.1のベルヌーイ・ガウス信号
通信路行列	i.i.d.ガウス行列
信号対雑音比(SNR)	30 dB
反復回数	2回

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

直交/ベクトルAMP [2, 3]

モジュールA（LMMSE推定）

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{A},t} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_t^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t}),$$

$$\boldsymbol{\Xi}_t = \frac{\sigma^2}{v_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t}}\boldsymbol{I}_M + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

$$v_{\mathrm{A},t} = \frac{v_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t}}{N}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_t^{-1}\boldsymbol{A}\right),$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \frac{\boldsymbol{x}_{\mathrm{A},t} - \xi_{\mathrm{A},t}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t}}{1-\xi_{\mathrm{A},t}}, \quad v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \frac{\xi_{\mathrm{A},t}v_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t}}{1-\xi_{\mathrm{A},t}}, \quad \xi_{\mathrm{A},t} = \frac{v_{\mathrm{A},t}}{v_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t}}.$$

モジュールB（要素ごとの軟判定）

オンサーガ補正

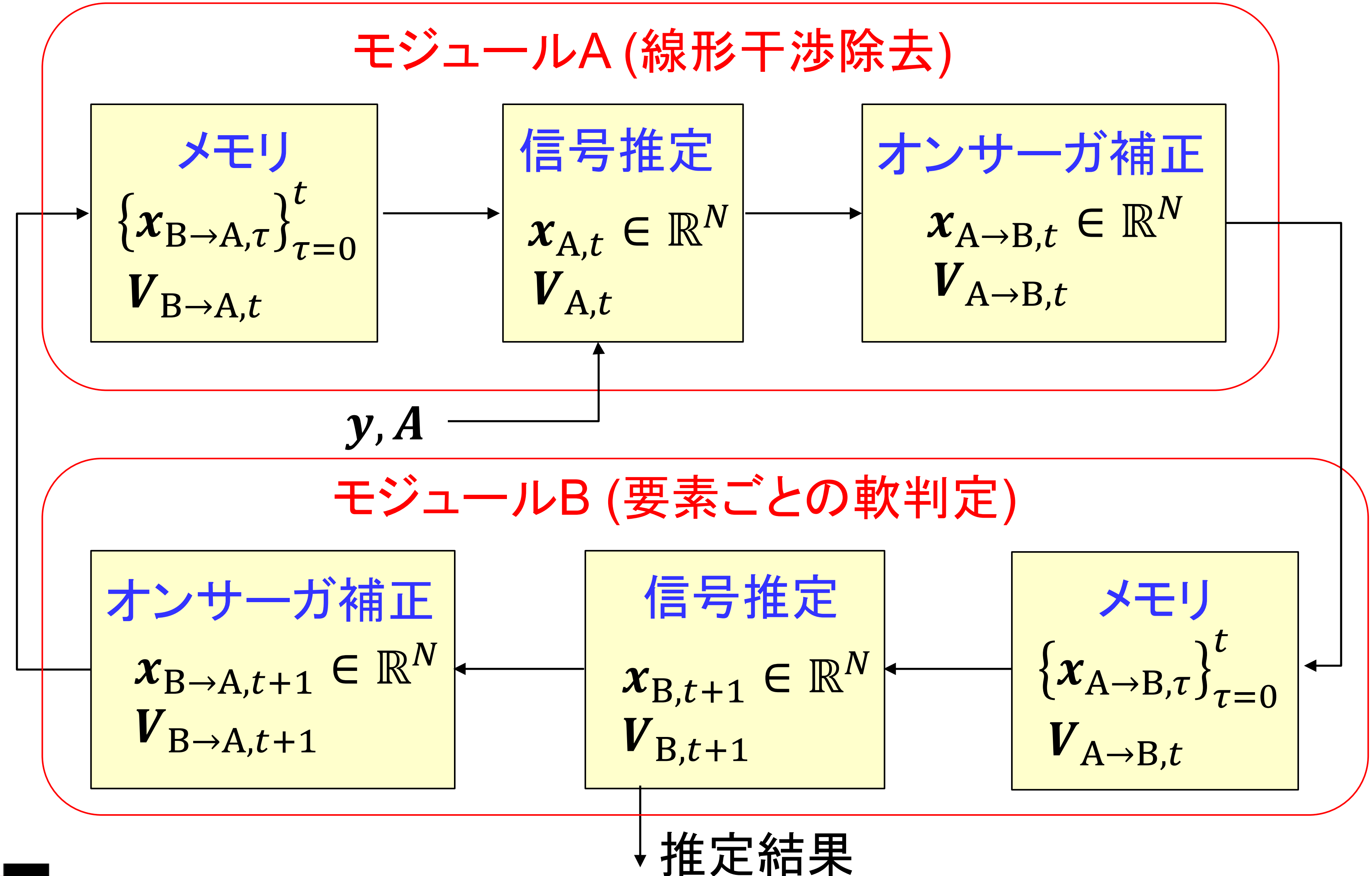
$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1} = \mathbb{E}[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}, v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}],$$

$$v_{\mathrm{B},t+1} = \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1}\right\|^2 \middle| \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}, v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}\right]$$

AMPと同定義

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t} = \frac{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1} - \xi_{\mathrm{B},t}\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}}{1-\xi_{\mathrm{B},t}}, \quad v_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t} = \frac{\xi_{\mathrm{B},t}v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}}{1-\xi_{\mathrm{B},t}}, \quad \xi_{\mathrm{B},t} = \frac{v_{\mathrm{B},t+1}}{v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}}.$$

長期記憶型メッセージ伝播法の概要



畳み込みAMP (CAMP) [4]

モジュールA（整合フィルタ推定）

$\rho_{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}$：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$の漸近固有値分布

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \xi_{\tau}^{(t-1)} g_{t-\tau} \boldsymbol{z}_{\tau}, \quad \xi_{\tau}^{(t-1)} = \prod_{t'=\tau}^{t-1} \frac{v_{\mathrm{B},t'+1,t'+1}}{v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t',t'}},$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_t, \quad \boldsymbol{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \boldsymbol{\Phi}_t^{\mathrm{CAMP}}(\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t-1}, \boldsymbol{V}_{\mathrm{B},t}; \rho_{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}).$$

タップ係数$g_\tau \in \mathbb{R}$と共分散行列$\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}$は状態発展法で設計する。

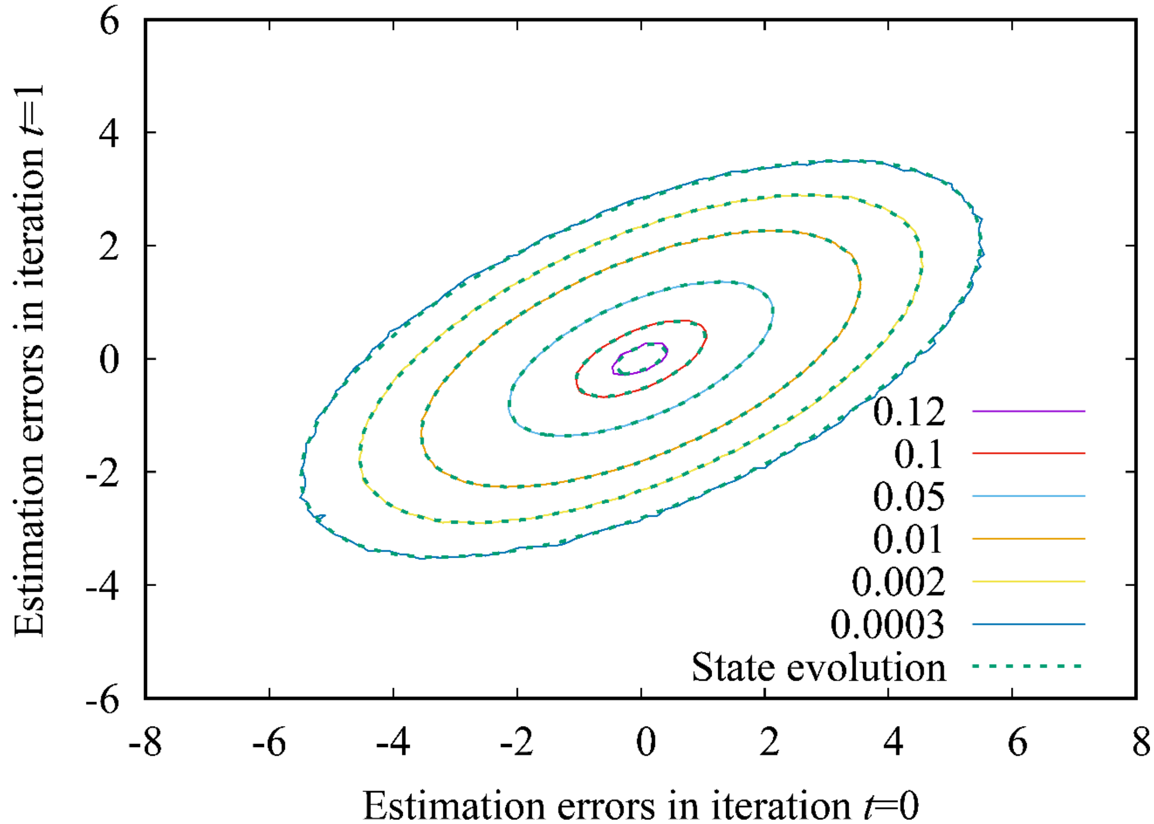
モジュールB（要素ごとの軟判定）

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1} = \mathbb{E}[\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}, v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}],$$

$$v_{\mathrm{B},t+1,t'+1} = \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t'+1}) \middle| \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t'}\right]$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}_t, \quad (\boldsymbol{h}_t, \boldsymbol{h}_{t'}) \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{0}, \begin{bmatrix} v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t,t}\boldsymbol{I} & v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t,t'}\boldsymbol{I} \\ v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t',t}\boldsymbol{I} & v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t',t'}\boldsymbol{I} \end{bmatrix}\right)$$

誤差の同時確率密度関数の等高線



システムサイズ	$M = 8192$、$N = 16384$
送信信号	信号密度0.1のベルヌーイ・ガウス信号
通信路行列	条件数5の右直交不変行列
信号対雑音比(SNR)	30 dB

TOYOHASHI
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

勾配降下法による逆行列演算の近似

OAMP/VAMPにおける逆行列演算

$$\boldsymbol{z}_t = c_t \boldsymbol{\Xi}_t^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t}) \iff \boldsymbol{\Xi}_t \boldsymbol{z}_t = c_t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t})$$

$c_t \in \mathbb{R}$は任意定数

２次最適化問題としての定式化

$$\boldsymbol{z}_t = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^M} f_t(\boldsymbol{z}), \quad f_t(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_t\boldsymbol{z} - c_t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}.$$

勾配降下法による近似

$$\boldsymbol{z}_t^{(i+1)} = \boldsymbol{z}_t^{(i)} - \epsilon_t \nabla f_t\left(\boldsymbol{z}_t^{(i)}\right) = (\boldsymbol{I} - \epsilon_t\boldsymbol{\Xi}_t)\boldsymbol{z}_t^{(i)} + \epsilon_t c_t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t})$$

$\epsilon_t > 0$の最適化

$$\boldsymbol{z}_t^{(i+1)} = \epsilon_t(\bar{\lambda}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{z}_t^{(i)} + \underbrace{\epsilon_t c_t}_{=\zeta_t}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t})$$

$= \zeta_t$とおく

メモリAMP (MAMP) [5]

設計指針

MAMPの反復ごとに勾配降下法の更新を1回だけ行う。

モジュールA（線形推定）

$$\boldsymbol{z}_t = \epsilon_t \left(\bar{\lambda} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \right) \boldsymbol{z}_{t-1} + \zeta_t \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t} \right),$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_t + \sum_{\tau=0}^{t} \zeta_\tau \epsilon_{\tau+1}^{(t)} \xi_{\mathrm{A},t-\tau} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},\tau}}{\sum_{\tau=0}^{t} \zeta_\tau \epsilon_{\tau+1}^{(t)} \xi_{\mathrm{A},t-\tau}}, \qquad \epsilon_{\tau+1}^{(t)} = \prod_{t'=\tau}^{t-1} \epsilon_{t'}',$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} = \boldsymbol{\Phi}_t^{\mathrm{MAMP}} \left(\boldsymbol{V}_{\mathrm{B},t}; \rho_{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}} \right).$$

パラメータ$\xi_{\mathrm{A},\tau}$, $\zeta_t \in \mathbb{R}$と共分散行列$\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}$は状態発展法で設計

メモリAMP (MAMP) [5]

モジュールB（要素ごとの軟判定）

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1}, = \mathbb{E}[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}, v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}],$$

CAMPと同じ

$$v_{\mathrm{B},t+1,t'+1} = \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t'+1})|\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t'}\right]$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t} = \frac{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B},t+1} - \xi_{\mathrm{B},t}\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}}{1 - \xi_{\mathrm{B},t}}, \quad \xi_{\mathrm{B},t} = \frac{v_{\mathrm{B},t+1,t+1}}{v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t,t}},$$

OAMP/VAMPと同じ

$$v_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t+1,t'+1} = \frac{v_{\mathrm{B},t+1,t'+1} - \xi_{\mathrm{B},t}\xi_{\mathrm{B},t'}v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t,t'}}{(1 - \xi_{\mathrm{B},t})(1 - \xi_{\mathrm{B},t'})} \quad [6]$$

原著[5]とは異なる$v_{\mathrm{B}\to\mathrm{A},t+1,t'+1}$の更新式[6]を用いた。

[6] K. Takeuchi, “On the convergence of orthogonal/vector AMP: Long-memory message-passing strategy,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 68, no. 12, pp. 8121–8138, Dec. 2022.

収束性の保証

長期記憶型(LM)ダンピング [5, 6, 7]

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t} := \sum_{\tau=0}^{t} \theta_{t,\tau} \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},\tau}, \qquad \begin{bmatrix} \theta_{t,0} \\ \vdots \\ \theta_{t,t} \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}^{-1}\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}^{-1}\boldsymbol{1}},$$

$$v_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t,t'} := \frac{1}{\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}^{-1}\boldsymbol{1}} \quad \text{for all } t' \in \{0, \dots, t\}.$$

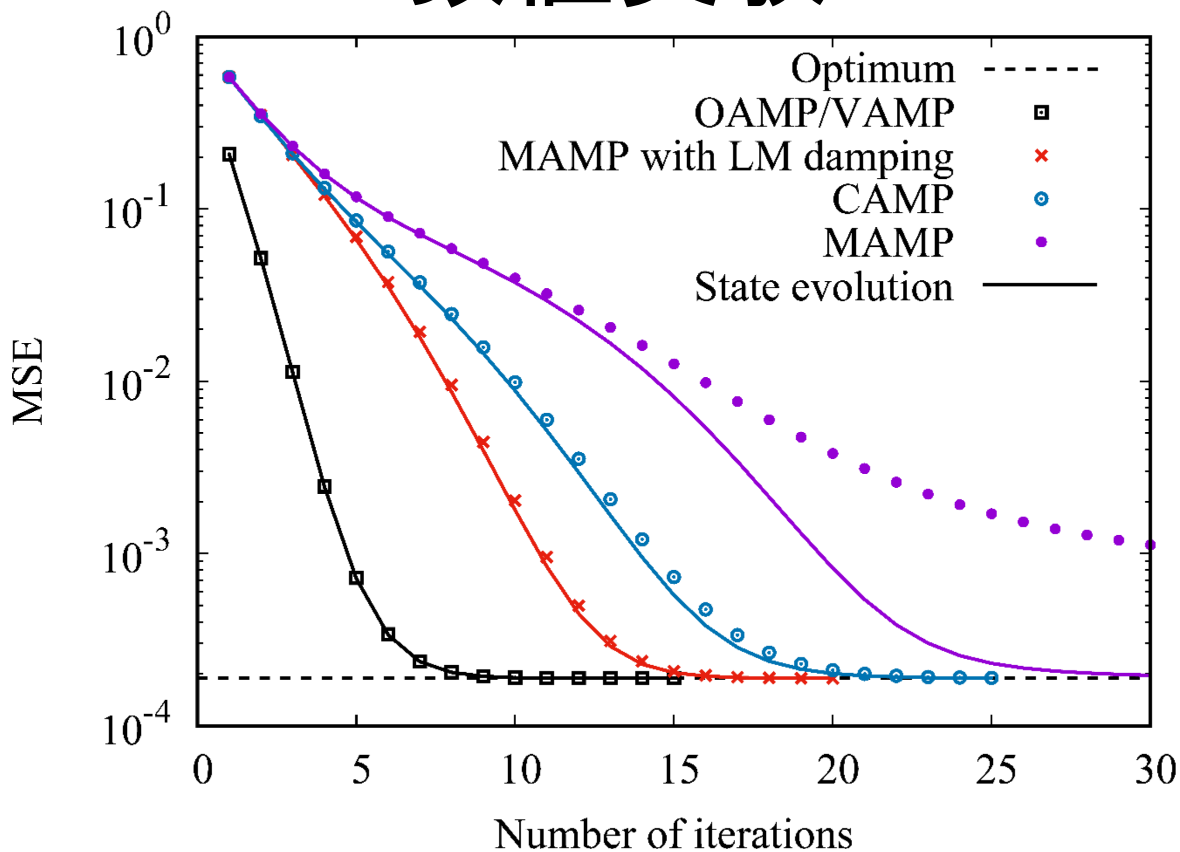
LMダンピングの効果[6, 7]

大システム極限において、LMダンピング後の平均二乗誤差 $N^{-1}\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B},t}\right\|^2\right]$は、一般に反復$t$に関して単調減少する。

⇒ LMダンピングを用いたMAMPは収束する。

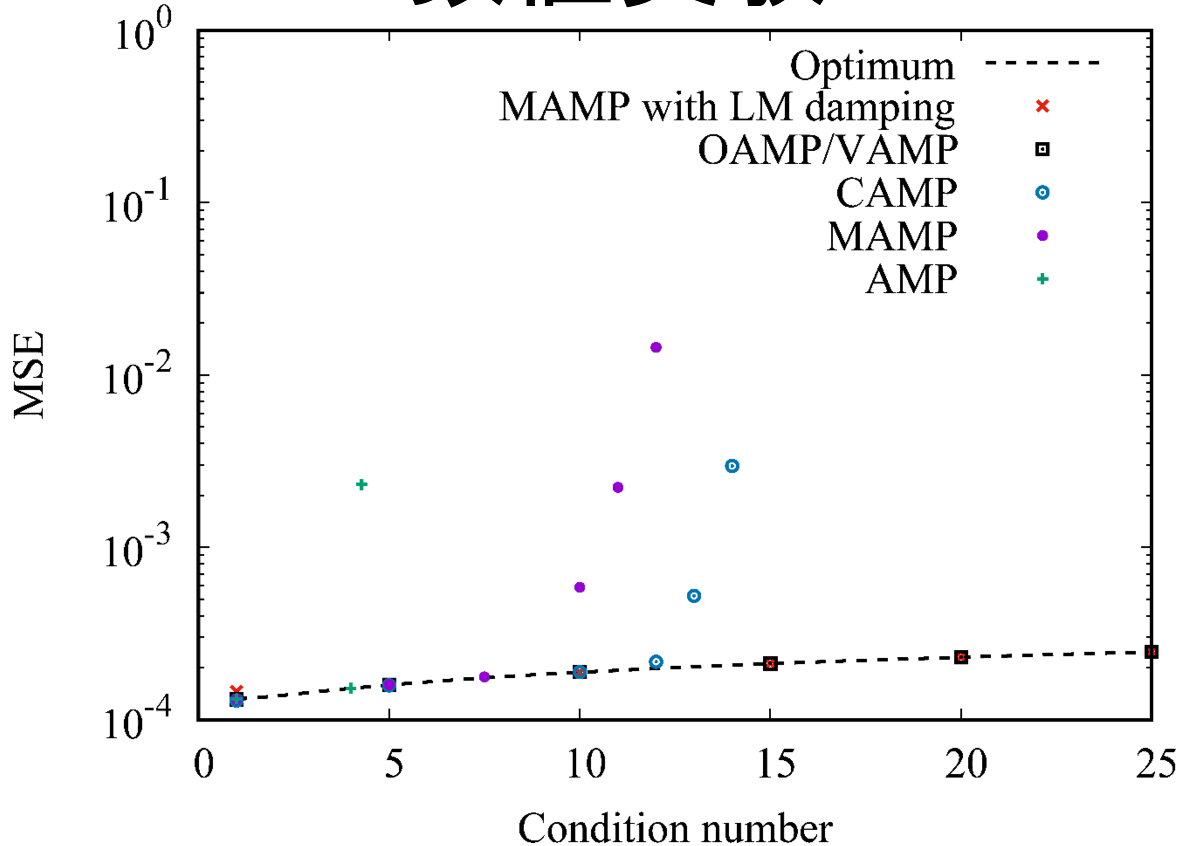
[7] L. Liu, S. Huang, and B. M. Kurkoski, “Sufficient statistic memory approximate message passing,” in *Proc. 2022 IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, Espoo, Finland, Jun.-Jul. 2022, pp.1378–1383.

数値実験



システムサイズ	$M = 8192$、$N = 16384$
送信信号	信号密度0.1のベルヌーイ・ガウス信号
通信路行列	条件数10の右直交不変行列
信号対雑音比(SNR)	30 dB

数値実験



システムサイズ	$M = 8192$、$N = 16384$
送信信号	信号密度0.1のベルヌーイ・ガウス信号
反復回数	MSEが最小値を取る回数
信号対雑音比(SNR)	30 dB

まとめ

現状認識

LMメッセージ伝播法を用いることで、AMPとOAMP/VAMPの利点(計算量、適用範囲、性能)を部分的に両立できる。

今後の課題

現状のLMメッセージ伝播法の性能（条件数<数十）は、最良なOAMP/VAMPのそれ（条件数<数千）に比べてはるかに劣る。

LMメッセージ伝播法は、システムが大きくないと、収束特性が悪い。

LMメッセージ伝播法は、非零平均の通信路行列に対処できない。

⇒ LMメッセージ伝播法は、改善の余地が大いにある。