情報通信システム(特)論II

Information and Communication Systems II

第2回講義資料

Lecture notes 2

複素ガウス分布

Complex Gaussian Distributions

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授　竹内啓悟

Associate Professor　Keigo Takeuchi

実ガウス分布(Real Gaussian distributions)

実ガウス確率変数Xの確率密度関数

Probability density function (pdf) of a real Gaussian random variable X

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

規格化(Normalization)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

証明(Proof): 二重積分を使って、$I^2 = 1$を証明する。(Prove $I^2 = 1$ with a double integral.)

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dxdy$$

$x = \mu + r\cos\theta$、$y = \mu + r\sin\theta$と変数変換するために、ヤコビアンを計算する。

To perform the change of variables, we compute the Jacobian.

$$|J| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} |J| = 1.$$

■

ガウス分布の性質(Properties of Gaussian distributions)

平均(Mean)：　$u=(x-\mu)/\sigma$と変数変換すると、(Using the change of a variable yields)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \mu.$$

二番目の等号で、規格化条件を使った。

In the second equality, we have used the normalization condition

最後の等号は、第二項の被積分関数の奇関数性から従う。

The last equality follows from the fact that the integrand in the second term is an even function.

分散(Variance)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p_X(x)dx = \sigma^2.$$

確かめよ。(Confirm it.)

ヒント(Hint)：　平均の場合と同じ変数変換をした後、部分積分と規格化条件を使って積分を評価せよ。

After using the same change of a variable as in the mean case, use the integration by parts and the normalization condition to evaluate the integral.

行列の基本演算(Basic operations for matrices)

性質1(Property 1)

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

性質2(Property 2)

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}. \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{*}$$ (conjugate transpose)

性質3(Property 3)

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

性質4(Property 4)

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}).$$

実正定値行列(Real positive definite matrices)

n次元実正定値行列(n-dimensional real positive definite matrix)$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0 \text{ for all non-zero vectors } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

性質(Property)

$\boldsymbol{A}$が正定値であるための必要十分条件は、対称行列$\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})/2$が正定値であることである。

A is positive definite if and only if the symmetric matrix $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})/2$ is positive definite.

必要性の証明(Proof of the necessity)

$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$の両辺を転置すると、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$ を得る。それゆえ、

Taking the transpose of both sides of $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ yields $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$. Thus,

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0.$$

十分性の証明(Proof of the sufficiency)

$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} > 0$から、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$を得る。$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le 0$を仮定すると、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le 0$となり矛盾が生じるので、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$である。

The condition $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} > 0$ implies $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$. Assume $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le 0$. Then, we have $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le 0$, which is a contradiction. Thus, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ holds.

実正定値対称行列の性質(Properties of real positive definite symmetric matrices)

直交行列(Orthogonal matrices)　$\boldsymbol{U}$

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}.$$

命題2.1(Proposition 2.1)

任意の実正定値対称行列$\boldsymbol{A}$は、正の固有値を持ち、直交行列$\boldsymbol{U}$を使って対角化できる。

Any real positive definite symmetric matrix $\boldsymbol{A}$ has positive eigenvalues, and can be diagonalized with an orthogonal matrix $\boldsymbol{U}$.

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}\ (\lambda_i > 0).$$

証明(Proof):

任意の対称行列は直交行列を使って対角化できるので、固有値がすべて正であることを確かめればよい。

Since any symmetric matrix can be diagonalized with some orthogonal matrix, it is sufficient to confirm that all eigenvalues are positive.

$\boldsymbol{e}_i$を$\mathbb{R}^n$のi番目の標準基底($\boldsymbol{I}_n$のi番目の列)とすると、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_i$に対して、

Let $\boldsymbol{e}_i$ denote the ith standard basis of $\mathbb{R}^n$ (ith column of $\boldsymbol{I}_n$). For $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_i$,

$$0 < \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i. \qquad \blacksquare$$

n次元実ガウス分布(n-dimensional real Gaussian distributions)

同時確率密度関数(Joint pdf)

任意の$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$と正定値対称行列$\boldsymbol{\Sigma}$に対して、

For any $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ and positive definite symmetric matrix $\boldsymbol{\Sigma}$,

$$p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

規格化(Normalization)

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) dx = 1.$$

$\because$ 対角化$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$において$|\det \boldsymbol{U}| = 1$なので、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$と変数変換すると、$\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$として、

Since $|\det \boldsymbol{U}| = 1$ holds in the diagonalization $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$, with $\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$, the change of variables $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ implies

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} e^{-\frac{(y_i - \tilde{\mu}_i)^2}{2\lambda_i}} dy_i = 1.$$

二番目の等号を確かめよ。(Confirm the second equality.)

■

n次元実ガウス分布(n-dimensional real Gaussian distributions)

平均(Mean) $\quad \mathbb{E}[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\mu}.$

$\because \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}$と変数変換すると、(The change of variables $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}$ implies)

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{x}] = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{x} p_X(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{y}) \frac{e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{y}}}{(2\pi)^{n/2}(\det \boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\mu}.$$

共分散(Covariance) $\quad \mathbb{E}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{\Sigma}.$

$\because \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$と変数変換すると、(The change of variables $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$ implies)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}] &= \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{U}\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{y}}}{(2\pi)^{n/2}(\det \boldsymbol{\Lambda})^{1/2}} d\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{U} \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-y_i^2/(2\lambda_i)}}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} dy_i \, \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Sigma}.
\end{aligned}$$

円対称複素分布(Circularly symmetric complex distributions)

複素確率変数Zは、任意の$\theta \in [0, 2\pi)$に対して$e^{\mathrm{j}\theta}Z \sim Z$が成り立つとき、円対称と呼ばれる。

A complex random variable Z is called circularly symmetric if $e^{\mathrm{j}\theta}Z \sim Z$ holds for any $\theta \in [0, 2\pi)$.

$\Re[Z] = (Z + Z^*)/2$と$\Im[Z] = (Z - Z^*)/(2\mathrm{j})$から、複素確率変数$Z$の分布は、$Z$と$Z^*$(複素共役)の同時分布によって決定される。

From $\Re[Z] = (Z + Z^*)/2$ and $\Im[Z] = (Z - Z^*)/(2\mathrm{j})$, the distribution of a complex random variable Z is determined by the joint distribution of Z and Z^* (complex conjugate).

補題2.1(Lemma 2.1)

任意の円対称確率変数Zに対して、(For any circularly symmetric random variable Z,)

$$\mathbb{E}[Z^m (Z^*)^n] = 0, \qquad \text{for } m \neq n.$$

$\because$
$$\mathbb{E}[Z^m (Z^*)^n] = \mathbb{E}\left[\left(e^{\mathrm{j}\theta}Z\right)^m \left(e^{-\mathrm{j}\theta}Z^*\right)^n\right] = e^{\mathrm{j}(m-n)\theta}\mathbb{E}[Z^m (Z^*)^n].$$

$m \neq n$のとき、$e^{\mathrm{j}(m-n)\theta} \neq 1$となる$\theta$が存在するため、$\mathbb{E}[Z^m (Z^*)^n] = 0$を得る。

For $m \neq n$, there is some θ such that $e^{\mathrm{j}(m-n)\theta} \neq 1$. Thus, $\mathbb{E}[Z^m (Z^*)^n] = 0$ holds.

注意(Remark) 2次以下($m + n \leq 2$)の非零モーメントは、$\mathbb{E}[|Z|^2]$のみである。

$\mathbb{E}[|Z|^2]$ is the only non-zero moment up to 2nd order.

円対称複素ガウス分布(Circularly symmetric complex Gaussian (CSCG) distributions)

円対称確率変数Zの実部と虚部が、同時にガウス分布するとき、Zは円対称複素ガウス確率変数と呼ばれる。特に、$\sigma^2 = \mathbb{E}[|Z|^2]$を分散と呼ぶ。

A circularly symmetric random variable Z is called CSCG if the real and imaginary parts of Z are jointly Gaussian-distributed. In particular, $\sigma^2 = \mathbb{E}[|Z|^2]$ is called variance.

定理2.1(Theorem 2.1)

分散σ^2の円対称複素ガウス確率変数Zの実部と虚部は、互いに独立な平均0分散$\sigma^2/2$の実ガウス分布に従う。

証明(Proof)： 平均0は、$\mathbb{E}[Z] = 0$から従う。(The zero mean follows from $\mathbb{E}[Z] = 0$.)

さらに、$Z^2 = \Re[Z]^2 - \Im[Z]^2 + 2\mathrm{j}\Re[Z]\Im[Z]$と$\mathbb{E}[Z^2] = 0$から、実部と虚部の同一性と無相関性(したがって、独立性)が成り立つ。

Furthermore, $Z^2 = \Re[Z]^2 - \Im[Z]^2 + 2\mathrm{j}\Re[Z]\Im[Z]$ and $\mathbb{E}[Z^2] = 0$ imply that the real and imaginary parts are identically distributed and uncorrelated (i.e. independent).

分散$\sigma^2/2$は、$|Z|^2 = \Re[Z]^2 + \Im[Z]^2$と$\mathbb{E}[|Z|^2] = \sigma^2$から従う。

The variance $\sigma^2/2$ follows from $|Z|^2 = \Re[Z]^2 + \Im[Z]^2$ and $\mathbb{E}[|Z|^2] = \sigma^2$. ■

複素ガウス分布(Complex Gaussian distributions)

複素確率変数Zは、$Z-\mu$が分散σ^2の円対称複素ガウス分布するとき、通信では平均μ分布σ^2の複素ガウス分布$\mathcal{CN}(\mu,\sigma^2)$に従うと言う。

We say in communications that a complex random variable Z follows the complex Gaussian distribution $\mathcal{CN}(\mu,\sigma^2)$ with mean μ and variance σ^2, if $Z-\mu$ is CSCG with variance σ^2.

確率密度関数(Pdf)

$$Z \sim \mathcal{CN}(\mu,\sigma^2) \Longrightarrow p_Z(z) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|z-\mu|^2}{\sigma^2}}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

∵ 定理2.1から、(From Theorem 2.1, we have)

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/2}} e^{-\frac{(\Re[z]-\Re[\mu])^2}{2\sigma^2/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/2}} e^{-\frac{(\Im[z]-\Im[\mu])^2}{2\sigma^2/2}} = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|z-\mu|^2}{\sigma^2}}.$$

規格化(Normalization)

$$\int_{\mathbb{C}} p_Z(z)dz = 1,$$

ここで、$dz = d\Re[z]d\Im[z]$であり、積分は$\mathbb{R}^2$の二重積分として定義される。

where the integration is defined as the double integral over $\mathbb{R}^2$ for $dz = d\Re[z]d\Im[z]$.

正定値行列(Positive definite matrices)

n次元複素正定値行列(n-dimensional complex positive definite matrix)$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} > 0 \text{ for all non-zero vectors } \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{n}.$$

性質(Property)

$\boldsymbol{A}$が正定値であるための必要十分条件は、$\Im[\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}] = 0$かつエルミート行列$\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})/2$が正定値であることである。

A is positive definite if and only if $\Im[\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}] = 0$ holds and the Hermitian matrix $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})/2$ is positive definite.

必要性の証明(Proof of the necessity)

$\Im[\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}] = 0$は自明である。$\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} > 0$の両辺を共役転置すると、$\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z} > 0$を得る。それゆえ、

$\Im[\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}] = 0$ is trivial. Taking the conjugate transpose of both sides of $\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} > 0$ yields $\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z} > 0$. Thus,

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z})/2 > 0.$$

十分性の証明(Proof of the sufficiency)

$\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z} > 0$から、$\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z} > 0$を得る。$\Im[\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}] = 0$ から$\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \le 0$を仮定すると、$\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z} \le 0$となり矛盾が生じるので、$\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} > 0$である。

The condition $\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z} > 0$ implies $\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z} > 0$. Assume $\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \le 0$, since $\Im[\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}] = 0$ holds. Then, we have $\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z} \le 0$, which is a contradiction. Thus, $\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} > 0$ holds.

正定値エルミート行列の性質(Properties of positive definite Hermitian matrices)

ユニタリ行列(Unitary matrices) $\boldsymbol{U}$

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{I}.$$

命題2.1’(Proposition 2.1’)

任意の正定値エルミート行列$\boldsymbol{A}$は、正の固有値を持ち、ユニタリ行列$\boldsymbol{U}$を使って対角化できる。

Any positive definite Hermitian matrix $\boldsymbol{A}$ has positive eigenvalues, and can be diagonalized with a unitary matrix $\boldsymbol{U}$.

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \ (\lambda_i > 0).$$

証明(Proof)：

任意のエルミート行列はユニタリ行列を使って対角化できるので、固有値がすべて正であることを確かめればよい。

Since any Hermitian matrix can be diagonalized with some unitary matrix, it is sufficient to confirm that all eigenvalues are positive.

$\boldsymbol{e}_i$を$\mathbb{C}^n$のi番目の標準基底($\boldsymbol{I}_n$のi番目の列)とすると、$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_i$に対して、

Let $\boldsymbol{e}_i$ denote the ith standard basis of $\mathbb{C}^n$ (ith column of $\boldsymbol{I}_n$). For $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_i$,

$$0 < \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i. \qquad \blacksquare$$

円対称複素確率ベクトル(Circularly symmetric complex random vectors)

複素確率ベクトル$\boldsymbol{Z}$は、任意の$\theta \in [0, 2\pi)$に対して$e^{\mathrm{j}\theta}\boldsymbol{Z} \sim \boldsymbol{Z}$が成り立つとき、円対称と呼ばれる。

A complex random vector $\boldsymbol{Z}$ is called circularly symmetric if $e^{\mathrm{j}\theta}\boldsymbol{Z} \sim \boldsymbol{Z}$ holds for any $\theta \in [0, 2\pi)$.

補題2.1'(Lemma 2.1')

任意の円対称確率ベクトル$\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)^{\mathrm{T}}$に対して、

For any circularly symmetric random vector $\boldsymbol{Z}$,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\{Z_i^{m_i}(Z_i^*)^{n_i}\}\right] = 0 \ \text{ for } \sum_{i=1}^{n} m_i \neq \sum_{i=1}^{n} n_i .$$

$\because$

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\{Z_i^{m_i}(Z_i^*)^{n_i}\}\right] = e^{\mathrm{j}\sum_i (m_i - n_i)\theta}\,\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\{Z_i^{m_i}(Z_i^*)^{n_i}\}\right].$$

注意(Remark) 2次以下の非零モーメントは、$\mathbb{E}[Z_i Z_{i'}^*]$のみである。

$\mathbb{E}[Z_i Z_{i'}^*]$ is the only non-zero moment up to 2nd order.

複素ガウス確率ベクトル(Complex Gaussian random vectors)

円対称確率ベクトル$\boldsymbol{Z}$の実部と虚部が、同時にガウス分布するとき、$\boldsymbol{Z}$は円対称複素ガウス確率ベクトルと呼ばれる。$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}]$ を共分散行列と呼ぶ。

A circularly symmetric random vector $\boldsymbol{Z}$ is called CSCG if the real and imaginary parts of $\boldsymbol{Z}$ are jointly Gaussian-distributed. $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}]$ is called covariance matrix.

複素確率ベクトル$\boldsymbol{Z}$は、$\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu}$が共分散行列$\boldsymbol{\Sigma}$の円対称複素ガウス分布するとき、通信では平均$\boldsymbol{\mu}$共分散行列$\boldsymbol{\Sigma}$の複素ガウス分布$\mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$に従うと言う。

We say in communications that a complex random vector $\boldsymbol{Z}$ follows the complex Gaussian distribution $\mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ with mean $\boldsymbol{\mu}$ and covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}$, if $\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu}$ is CSCG.

定理2.2(Theorem 2.2)

$$\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad \Longrightarrow \quad p_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\pi^n \det \boldsymbol{\Sigma}} e^{-(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{H}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})}, \qquad \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n.$$

証明(Proof)： $\tilde{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu}$とおくことで、一般性を失うことなく、$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$を仮定する。

Without loss of generality, we assume $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$ by letting $\tilde{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu}$.

円対称複素ガウス分布が満たすべき性質$\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}] = \boldsymbol{0}$、$\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{O}$、$\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}] = \boldsymbol{\Sigma}$が成り立つことを示す。

We prove the properties $\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}] = \boldsymbol{0}$, $\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{O}$, and $\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}] = \boldsymbol{\Sigma}$ which the CSCG distribution should satisfy.

定理2.2の証明(Proof of Theorem 2.2)

平均(Mean)　対角化$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{U\Lambda U}^{\mathrm{H}}$に対して、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}$と変数変換すると、

Using the change of variables $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}$ for the diagonalization $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{U\Lambda U}^{\mathrm{H}}$ yields

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}] = \int_{\mathbb{C}^n} \boldsymbol{z} p_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U} \int_{\mathbb{C}^n} \boldsymbol{v} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi\lambda_i} e^{-\frac{|v_i|^2}{\lambda_i}} dv_i = \boldsymbol{0}.$$

共分散(Covariance)

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}] = \int_{\mathbb{C}^n} \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}} p_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U} \int_{\mathbb{C}^n} \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi\lambda_i} e^{-\frac{|v_i|^2}{\lambda_i}} dv_i \, \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

$$= \boldsymbol{U\Lambda U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{\Sigma}.$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}] = \int_{\mathbb{C}^n} \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} p_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U} \int_{\mathbb{C}^n} \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi\lambda_i} e^{-\frac{|v_i|^2}{\lambda_i}} dv_i \, \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}.$$

最後の等号の導出で、$V_i \sim \mathcal{CN}(0, \lambda_i)$に対して$\mathbb{E}\left[V_i^2\right] = 0$を使った。

In the derivation of the last equality, we have used $\mathbb{E}\left[V_i^2\right] = 0$ for $V_i \sim \mathcal{CN}(0, \lambda_i)$.

■