情報通信システム(特)論II

Information and Communication Systems II

第６回講義資料

Lecture notes 6

線形マルチユーザ検出

Linear Multiuser Detection

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授　竹内啓悟

Associate Professor　Keigo Takeuchi

無線通信路(Wireless channels)

物理層における無線通信システムのほとんどは、物理法則に基づいて以下のシステムでモデル化できる。

Almost all wireless communication systems in the physical layer can be modeled with the following system based on physical laws.

無線通信路の離散時間統計モデル(Discrete-time statistical model of wireless channels)

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{0}, N_0\boldsymbol{I}_M)$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$: 送信ベクトル(Transmitted vector)　$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^M$: 受信ベクトル(Received vector)

$\boldsymbol{H} \in \mathbb{C}^{M \times N}$: 通信路行列(Channel matrix)

$\boldsymbol{w} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{0}, N_0\boldsymbol{I}_M)$: 加法的白色ガウス雑音(AWGN)ベクトル

Additive white Gaussian noise (AWGN) vector

統計的仮定(Statistical assumptions)

- 送信ベクトル$\boldsymbol{x}$は平均$\boldsymbol{0}$である。(The transmitted vector $\boldsymbol{x}$ is zero mean.)
- 確率変数$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{w}$は独立である。($\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{x}$, and $\boldsymbol{w}$ are independent random variables.)

マルチユーザ検出(Multiuser detection (MUD))

受信ベクトル$\boldsymbol{y}$と通信路行列$\boldsymbol{H}$の知識を使って、送信ベクトル$\boldsymbol{x}$を推定せよ。

Estimate the transmitted vector $\boldsymbol{x}$ on the basis of the knowledge about the received vector $\boldsymbol{y}$ and the channel matrix $\boldsymbol{H}$.

マルチユーザ検出の究極の目標(Ultimate Goal of MUD)

最小限の計算量で、情報理論的に最良な性能を達成する。

Achieve information-theoretically optimal performance using MUD with minimum complexity.

最小限計算量の定義(Definition of minimum complexity)

受信ベクトル$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^M$に固定回数の線形演算を施して、各データシンボルの推定値を計算するときに必要な計算量。

Complexity required for computing an estimate of each data symbol via a fixed number of linear operations with respect to the received vector $\boldsymbol{y}$.

一般に、(In general,) $O(MN)$

単一入力単一出力(SISO)の場合(Case of single-input single-output (SISO))

$$y = hx + n, \qquad n \sim \mathcal{CN}(0, N_0).$$

$y = hx + n, \quad n \sim \mathcal{CN}(0, N_0).$

データシンボル$x \in \mathbb{C}$は、平均0分散Pと仮定する。

Assume that the data symbol $x \in \mathbb{C}$ has zero mean and variance P.

線形最小平均二乗誤差(LMMSE)推定

Linear minimum mean-square error (LMMSE) estimation

$$\hat{c} = \underset{c \in \mathbb{C}}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}[|x - c^* y|^2]$$

平均二乗誤差(Mean-square error (MSE))

$$\mathbb{E}[|x - c^* y|^2] = \mathbb{E}[|(1 - c^* h)x - c^* n|^2]$$

$$= |1 - c^* h|^2 \mathbb{E}[|x|^2] - (1 - c^* h)^* c^* \mathbb{E}[x^* n] - (1 - c^* h) c \mathbb{E}[x n^*] + |c|^2 \mathbb{E}[|n|^2]$$

$$= (1 - c^* h - c h^* + |h|^2 |c|^2) P + N_0 |c|^2$$

$$= (P|h|^2 + N_0) \left| c - \frac{Ph}{P|h|^2 + N_0} \right|^2 + \frac{P N_0}{P|h|^2 + N_0}$$

$$\therefore \quad \hat{c} = \frac{Ph}{P|h|^2 + N_0}, \qquad \mathbb{E}[|x - \hat{c}^* y|^2] = \frac{P N_0}{P|h|^2 + N_0}.$$

単一入力単一出力(SISO)の場合(Case of single-input single-output (SISO))

$x \sim \mathcal{CN}(0, P)$を仮定して、$x$の事後平均推定量(PME)を計算する。

Assume $x \sim \mathcal{CN}(0, P)$, and compute the posterior mean estimator (PME) of x.

注意(Remark) PMEは最小平均二乗誤差(MMSE)推定量である。

The PME is equal to the minimum mean-square error (MMSE) estimator.

$$p(y|h,x)p(x) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{|y-hx|^2}{N_0}} \frac{1}{\pi P} e^{-\frac{|x|^2}{P}} = \frac{1}{\pi^2 P N_0} e^{-\frac{|y-hx|^2}{N_0} - \frac{|x|^2}{P}}.$$

$$\text{Exponent} = -\frac{|h|^2|x|^2 - y^* hx - yh^* x^* + |y|^2}{N_0} - \frac{|x|^2}{P}$$

$$= -\frac{P|h|^2 + N_0}{PN_0}\left|x - \frac{Ph^* y}{P|h|^2 + N_0}\right|^2 - \frac{|y|^2}{P|h|^2 + N_0}.$$

$$\therefore \quad \mathbb{E}[x|y] = \frac{Ph^* y}{P|h|^2 + N_0}, \qquad \mathbb{V}[x|y] = \frac{PN_0}{P|h|^2 + N_0}.$$

この場合、MMSE推定量はLMMSE推定量と一致する。

In this case, the MMSE estimator coincides with the LMMSE estimator.

整合フィルタ(Matched filter (MF))

通信路モデル(Channel model)

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_n x_n + \sum_{n' \neq n} \boldsymbol{h}_{n'} x_{n'} + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{H} = (\boldsymbol{h}_1, \dots, \boldsymbol{h}_N), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^{\mathrm{T}}.$$

近似(Approximation)

干渉成分$\sum \boldsymbol{h}_{n'} x_{n'}$を無視する。(Ignore the interference $\sum \boldsymbol{h}_{n'} x_{n'}$.)

近似の妥当性(Validity of the approximation)

- ノイズ電力$N_0 \to \infty$ (ノイズに制約された領域)

  Noise power $N_0 \to \infty$ (Noise-limited region)

通信として重要な場合ではない。

The case is not important in communications.

整合フィルタ(Matched filter (MF))

通信路(Channel)

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{h}_n, x_n) \approx \frac{1}{(\pi N_0)^M} e^{-\frac{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}_n x_n\|^2}{N_0}}.$$

$$\text{Exponent} = -\frac{\|\boldsymbol{y}\|^2 - \boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_n x_n - \boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}x_n^* + \|\boldsymbol{h}_n\|^2|x_n|^2}{N_0}.$$

条件付き確率密度関数$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{h}_n, x_n)$は、$\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$を通じてのみ、$\boldsymbol{y}$に依存する。

The conditional probability density function (pdf) depends on $\boldsymbol{y}$ only through $\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$.

十分統計量(Sufficient statistic)

$$\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} \approx \|\boldsymbol{h}_n\|^2 x_n + \boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w} \sim \mathcal{CN}(0, N_0\|\boldsymbol{h}_n\|^2)$$

$$\because \ \mathbb{E}\left[\left|\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\right|^2\right] = \boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\mathbb{E}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}]\boldsymbol{h}_n = N_0\|\boldsymbol{h}_n\|^2.$$

これは、SISO通信路である。(This is a SISO channel.)

$$\hat{x}_{n,\mathrm{MF}} = \frac{P\|\boldsymbol{h}_n\|^2\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}}{P\|\boldsymbol{h}_n\|^4 + N_0\|\boldsymbol{h}_n\|^2} = \frac{P\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}}{P\|\boldsymbol{h}_n\|^2 + N_0}.$$

整合フィルタ(MF)

ゼロフォーシング(Zero forcing (ZF))

通信路モデル(Channel model)

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}.$$

仮定(Assumption)

$M \geq N$かつ$\boldsymbol{H}$はフルランクであると仮定する。

Assume $M \geq N$, and that $\boldsymbol{H}$ is full rank.

近似(Approximation)

AWGN$\boldsymbol{w}$を無視する。(Ignore the AWGN $\boldsymbol{w}$.)

近似の妥当性(Validity of the approximation)

干渉電力に比べてノイズ電力は十分に小さい。(干渉に制約された領域)

The noise power is sufficiently smaller than the interference power (Interference-limited region)

通信として重要な場合である。(The case is important in communications.)

ゼロフォーシング(Zero forcing (ZF))

通信路モデル(Channel model)

$$\boldsymbol{y} \approx \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}.$$

線形方程式を解く。(Solve the linear equation.)

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZF}} = \boldsymbol{H}^{\dagger}\boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}.$$ ゼロフォーシング(ZF)

欠点(Disadvantage)

ノイズが増幅される。(Noise is enhanced.)

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{H}^{\dagger}\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{H}^{\dagger}\boldsymbol{w}\right)^{\mathrm{H}}\right] = N_0\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1} = N_0\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}.$$

$\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}$の最小固有値が0に近いときに、実効ノイズの分散は発散する。

The variance of the effective noise diverges as the minimum eigenvalue of $\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}$ is close to zero.

LMMSE

近似(Approximation)

最良な推定量は、線形フィルタによって近似できる。

The best estimator can be approximated with a linear filter.

近似の妥当性(Validity of the approximation)

$M \gg N$の場合(Case of $M \gg N$)

3Gでは重要な場合であった。(This case was important in 3G.)

平均二乗誤差(MSE)

$$\boldsymbol{F} = \underset{\boldsymbol{F}\in\mathbb{C}^{M\times N}}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}\right\|^2\right].$$

LMMSE

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{LMMSE}} = P\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(N_0\boldsymbol{I}_M + P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{y} \qquad \text{for } \mathbb{E}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}] = P\boldsymbol{I}_N.$$

$$\min_{\boldsymbol{F}\in\mathbb{C}^{M\times N}} \mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}\right\|^2\right] = PN_0\mathrm{Tr}\left\{\left(P\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H} + N_0\boldsymbol{I}_N\right)^{-1}\right\}.$$

LMMSEの導出の準備(Preliminary for the derivation of LMMSE)

補題6.1 (行列反転公式) (Lemma 6.1 (Matrix inversion lemma))

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BDC})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}.$$

証明(Proof)

右辺に左から$\boldsymbol{BDC}$をかける。(Left-multiplying the right-hand side (RHS) by $\boldsymbol{BDC}$ yields)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{BDC}\{\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}\}\\&=\boldsymbol{BD}\{(\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\}(\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}\\&=B(\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}.\end{aligned}$$

これを使って、補題6.1を直接証明する。

We use this formula to prove Lemma 6.1 directly.

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BDC})\{\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}\}\\&=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}=\boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

■

LMMSEの導出（Derivation of LMMSE）

平均二乗誤差に通信路モデル$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}$を代入する。

Substituting the channel model $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}$ into the MSE yields

$$\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}\right\|^2\right]=\mathbb{E}\left[\left\|\left(\boldsymbol{I}_N-\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\right\|^2\right]=P\left\|\boldsymbol{I}_N-\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right\|^2+N_0\|\boldsymbol{F}\|^2.$$

$\|\boldsymbol{A}\|^2=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$や$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$を使って、

Using $\|\boldsymbol{A}\|^2=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ and $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}\right\|^2\right]&=\mathrm{Tr}\left\{P\left(\boldsymbol{I}_N-\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}\right)+N_0\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}\right\}\\
&=\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\left(N_0\boldsymbol{I}_M+P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\boldsymbol{F}-P\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}-P\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F}\right\}+NP\\
&=\mathrm{Tr}\left\{\left(\boldsymbol{F}-\widehat{\boldsymbol{F}}\right)^{\mathrm{H}}\left(N_0\boldsymbol{I}_M+P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)\left(\boldsymbol{F}-\widehat{\boldsymbol{F}}\right)\right\}\\
&\quad+NP-P^2\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(N_0\boldsymbol{I}_M+P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\right\}\\
&\geq NP-P^2\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(N_0\boldsymbol{I}_M+P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\right\},
\end{aligned}$$

等号成立は$\boldsymbol{F}=\widehat{\boldsymbol{F}}$のときに限る。(The equality holds only for $\boldsymbol{F}=\widehat{\boldsymbol{F}}$.)

$$\widehat{\boldsymbol{F}}=P\left(N_0\boldsymbol{I}_M+P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{H}.$$

LMMSEの導出(Derivation of LMMSE)

それゆえ、(Thus, we have)

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{LMMSE}} = \left\{P\left(N_0 \boldsymbol{I}_M + P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\right\}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(N_0 \boldsymbol{I}_M + P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{y}.$$

平均二乗誤差の最小値(Minimum of the MSE)

$$NP - P^2\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(N_0 \boldsymbol{I}_M + P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\right\}$$
$$= P\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(\frac{N_0}{P}\boldsymbol{I}_M + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\right\}$$
$$= P\mathrm{Tr}\left\{\left(\boldsymbol{I}_N + \frac{P}{N_0}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\right\} = PN_0\mathrm{Tr}\left\{\left(P\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H} + N_0\boldsymbol{I}_N\right)^{-1}\right\}.$$

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_N$、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}$、$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D} = (P/N_0)\boldsymbol{I}_M$とする補題6.1を使った。

We have used Lemma 6.1 with $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_N$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{H}$, and $\boldsymbol{D} = (P/N_0)\boldsymbol{I}_M$.

一般化事後平均推定量(Generalized posterior mean estimator (GPME))

三つの推定量を統一的な方法で導出しよう。

We shall derive the three estimators in a unified method.

近似(Approximations)

データベクトル$\boldsymbol{x}$は、円対称複素ガウス分布$\mathcal{CN}(\mathbf{0}, P\boldsymbol{I}_N)$に従う。

The data vector $\boldsymbol{x}$ follows the circularly symmetric complex Gaussian (CSCG) distribution.

ノイズの分散は$\widetilde{N}_0$であると想定する。(Postulate that the noise variance is $\widetilde{N}_0$.)

想定通信路(Postulated channel)

$$\widetilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{w}}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{x}} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, P\boldsymbol{I}_N), \quad \widetilde{\boldsymbol{w}} \sim \mathcal{CN}\left(\mathbf{0}, \widetilde{N}_0\boldsymbol{I}_M\right).$$

一般化事後平均推定量(GPME)

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{GPME}} = \mathbb{E}[\widetilde{\boldsymbol{x}}|\widetilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}, \boldsymbol{H}] = \left(\frac{\widetilde{N}_0}{P}\boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}.$$

一般化事後平均推定量の導出(Derivation of GPME)

$$p(\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} | \boldsymbol{H}, \tilde{\boldsymbol{x}}) p(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{(\pi \tilde{N}_0)^M} e^{-\frac{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}{\tilde{N}_0}} \frac{1}{(\pi P)^N} e^{-\frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}{P}}.$$

$$\text{Exponent} = -\frac{\|\boldsymbol{y}\|^2 - \boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{x}} - \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} + \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{x}}}{\tilde{N}_0} - \frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}{P}$$

$$= -\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{H}} \left(\frac{1}{P}\boldsymbol{I}_N + \frac{1}{\tilde{N}_0}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H} \right) \tilde{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{\tilde{N}_0}\left(\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} \right) - \frac{\|\boldsymbol{y}\|^2}{\tilde{N}_0}$$

$$= -(\tilde{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{H}} \left(\frac{1}{P}\boldsymbol{I}_N + \frac{1}{\tilde{N}_0}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H} \right) (\tilde{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}})$$

$$-\frac{\|\boldsymbol{y}\|^2}{\tilde{N}_0} + \hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{H}} \left(\frac{1}{P}\boldsymbol{I}_N + \frac{1}{\tilde{N}_0}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H} \right) \hat{\boldsymbol{x}}.$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{1}{P}\boldsymbol{I}_N + \frac{1}{\tilde{N}_0}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H} \right)^{-1} \frac{1}{\tilde{N}_0}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{GPME}}$$

それゆえ、(Thus, we have) $\mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{x}} | \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}, \boldsymbol{H}] = \hat{\boldsymbol{x}}.$

三つの推定量の導出(Derivations of the three estimators)

整合フィルタ(MF)

$$\lim_{\tilde{N}_0\to\infty} \tilde{N}_0 \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{GPME}} = \lim_{\tilde{N}_0\to\infty} \tilde{N}_0 \left(\frac{\tilde{N}_0}{P}\boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1} \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}.$$

ゼロフォーシング(ZF)

$$\lim_{\tilde{N}_0\to 0} \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{GPME}} = \lim_{\tilde{N}_0\to 0} \left(\frac{\tilde{N}_0}{P}\boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1} \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}.$$

LMMSE

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{GPME}}\Big|_{\tilde{N}_0=N_0} = \left(\frac{N_0}{P}\boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1} \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(N_0\boldsymbol{I}_M + P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{y}.$$

最後の等号は、次ページで証明する。
The last equality is proved in the next page.

LMMSEの導出（Derivation of LMMSE）

13ページ目で利用した行列反転公式を利用する。

We use the matrix inversion lemma in page 13.

$$\left(\frac{N_0}{P}\boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}} = \frac{P}{N_0}\left\{\boldsymbol{I}_N - \frac{P}{N_0}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{I}_M + \frac{P}{N_0}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\right\}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}$$

$$= \frac{P}{N_0}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left\{\boldsymbol{I}_M - \left(\boldsymbol{I}_M + \frac{P}{N_0}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}_M + \frac{P}{N_0}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}} - \boldsymbol{I}_M\right)\right\}$$

$$= \frac{P}{N_0}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left\{\boldsymbol{I}_M - \boldsymbol{I}_M + \left(\boldsymbol{I}_M + \frac{P}{N_0}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\right\}$$

$$= P\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}} + N_0\boldsymbol{I}_M\right)^{-1}.$$

計算量(Complexity)

整合フィルタ(MF)

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{MF}} \propto \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} \quad \Rightarrow \quad O(MN)$$ (最小限の計算量)

ゼロフォーシング(ZF)

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ZF}} = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$$

$$\Rightarrow \quad O(MN^2 + N^3 + MN + N^2) = O(MN^2 + N^3)$$

LMMSE

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{LMMSE}} = \left(\frac{N_0}{P}\boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\left(N_0\boldsymbol{I}_M + P\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{y}.$$

$M \geq N$の場合(For $M \geq N$,)

$$O\{(N + MN^2) + N^3 + MN + N^2\} = O(MN^2 + N^3)$$

$M < N$の場合(For $M < N$,)

$$O\{(M + M^2N) + M^3 + M^2 + MN\} = O(M^2N + M^3)$$