通信工学概論

Introduction to Communication Engineering

第3回講義資料

Lecture notes 3

ベースバンド及び高周波信号1

Baseband and radio-frequency signals 1

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授　竹内啓悟

Associate Professor　Keigo Takeuchi

周波数帯域の効率的利用(Efficient use of frequency bands)

周波数割り当て(Frequency allocation)

用途ごとに使用する周波数帯を規制することで、周波数の効率的な利用を図る。

Usage of frequency bands are regulated for efficient frequency use.

表3.1 : 主な周波数の割り当て(Table 3.1: Part of frequency allocation)

用途(Usage)	周波数帯(Frequency bands)
第5世代移動通信(5G)	Sub 6: 3.6～4.1 GHz、4.5～4.6 GHz、 ミリ波: 27.0～28.2 GHz、29.1～29.5 GHz
Wi-Fi 6 (IEEE 802.11.ax)	2.4～2.5 GHz、5.1～5.7 GHz

効率的な利用に向けて(Toward efficient frequency use)

フーリエ級数に基づく干渉対策では、基本周波数の整数倍のみ利用できる。

Interference management based on the Fourier series allows us to use only integer multiples of a fundamental frequency.

割り当てられた周波数帯を最大限に利用したい。

Use the allocated frequency bands most efficiently.

複素フーリエ級数(Complex Fourier series)

$\{e^{j2k\pi t/T}\}_{k=-\infty}^{\infty}$は、区間$[-T/2, T/2]$上の二乗可積分関数$g$の空間に対する直交基底関数である。

$\{e^{j2k\pi t/T}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ are orthogonal basis functions for the space of square-integrable functions g on the interval $[-T/2, T/2]$.

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2k\pi t/T}, \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2k\pi t/T} dt.$$

証明(Proof) 複素フーリエ級数は実フーリエ級数と等価であることを示す。

The complex Fourier series is equivalent to the real Fourier series.

実フーリエ級数(Real Fourier series)

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\right\},$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt.$$

複素フーリエ級数の導出(Derivation of the complex Fourier series)

$c_k = (a_k - jb_k)/2$とおく。(Let $c_k = (a_k - jb_k)/2$.)

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\left\{\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) - j\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\right\}dx = \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T/2} g(t)e^{-j2k\pi t/T}dt\,.$$

実フーリエ級数に$\cos\theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$と$\sin\theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/(j2)$を代入する。

Substitute $\cos\theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$ and $\sin\theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/(j2)$ into the real Fourier series.

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{j2k\pi t/T} + e^{-j2k\pi t/T}}{2} + b_k\frac{e^{j2k\pi t/T} - e^{-j2k\pi t/T}}{j2}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k - jb_k}{2}e^{j2k\pi t/T} + \sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{a_{-k} + jb_{-k}}{2}e^{j2k\pi t/T}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2k\pi t/T}. \qquad \because\ b_0 = 0, \quad a_{-k} = a_k, \quad b_{-k} = -b_k.$$

■

フーリエ変換(Fourier transform)

無限区間$(-\infty, \infty)$上の絶対可積分関数gに対して、

For any absolutely integrable function g on the infinite interval $(-\infty, \infty)$,

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt, \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df.$$

直観的な導出(Intuitive derivation)

複素フーリエ級数において$f = k/T$とおき、極限$T \to \infty$を取る。

Let $f = k/T$ in the complex Fourier series and take the limit $T \to \infty$.

$$Tc_k = \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \to G(f).$$

$$g(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T c_k e^{j2k\pi t/T} \to \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df.$$

$\because$ リーマン積分の定義より(Due to the definition of the Riemann integral.)

フーリエ変換の意味(Meaning of the Fourier transform)

複素フーリエ級数(Complex Fourier series)

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2k\pi t/T}$$

$|c_k|$は、$g(t)$に含まれる周波数$f = k/T$の信号成分の強度を表す。

$|c_k|$ represents the magnitude of the signal component at frequency $f = k/T$ included in $g(t)$.

$g(t)$が有限区間上の関数の場合、周波数成分は離散的。

The frequency components are discrete when $g(t)$ is a function on a finite interval.

逆フーリエ変換(Inverse Fourier transform)

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$$

$|G(f)|$は、$g(t)$に含まれる周波数fの信号成分の強度を表す。

$|G(f)|$ represents the magnitude of the signal component at frequency f included in $g(t)$.

$g(t)$が無限区間上の関数の場合、周波数成分は連続的。

The frequency components are continuous when $g(t)$ is a function on an infinite interval.

偶関数と奇関数(Even and odd functions)

偶関数(Even function)

実関数gは、次を満たすとき、偶関数と呼ばれる。

A real function g is called an even function if the following is satisfied:

$$g(-x) = g(x)$$

偶関数の性質(Property of even functions)

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(x)dx + \int_{-a}^{0} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(-x')dx'$$

$$= 2\int_{0}^{a} g(x)dx\,. \qquad \because g(-x) = g(x)$$

奇関数(Odd function)

実関数gは、次を満たすとき、奇関数と呼ばれる。

A real function g is called an odd function if the following is satisfied:

$$g(-x) = -g(x)$$

奇関数の性質(Property of odd functions)

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(-x')dx' = \int_{0}^{a} g(x)dx - \int_{0}^{a} g(x')dx' = 0.$$

フーリエ変換の計算(Computation of the Fourier transform)

例3.1 (Example 3.1)　以下の関数$H(f)$の逆フーリエ変換$h(t)$を計算せよ。

Compute the inverse Fourier transform $h(t)$ of the following function $H(f)$:

$$H(f) = \begin{cases} 1/W & \text{for } |f| \le W/2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

解答

Answer

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} e^{j2\pi f t} df$$

$$= \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \cos(2\pi f t)\, df + \frac{j}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \sin(2\pi f t)\, df = \frac{2}{W} \int_{0}^{W/2} \cos(2\pi f t)\, df\,.$$

赤色の等号の導出で、$\cos(-\theta) = \cos\theta$と$\sin(-\theta) = -\sin\theta$を使った。

In the derivation of the red equality, we have used $\cos(-\theta) = \cos\theta$ and $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

$$h(0) = \frac{2}{W} \int_{0}^{W/2} df = 1 \equiv \mathrm{sinc}(0).$$

$t \neq 0$の場合、

For $t \neq 0$,

$$h(t) = \left[\frac{\sin(2\pi f t)}{\pi W t}\right]_0^{W/2} = \frac{\sin(\pi W t)}{\pi W t} \equiv \mathrm{sinc}(Wt).$$

sinc関数(sinc function)

時間領域表現

Time-domain representation

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \qquad \mathrm{sinc}(0) = 1.$$

周波数領域表現

Frequency-domain representation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \begin{cases} 1 & \text{for } |f| \le 1/2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ナイキスト条件

Nyquist criterion

任意の整数nに対して、

For any integer n,

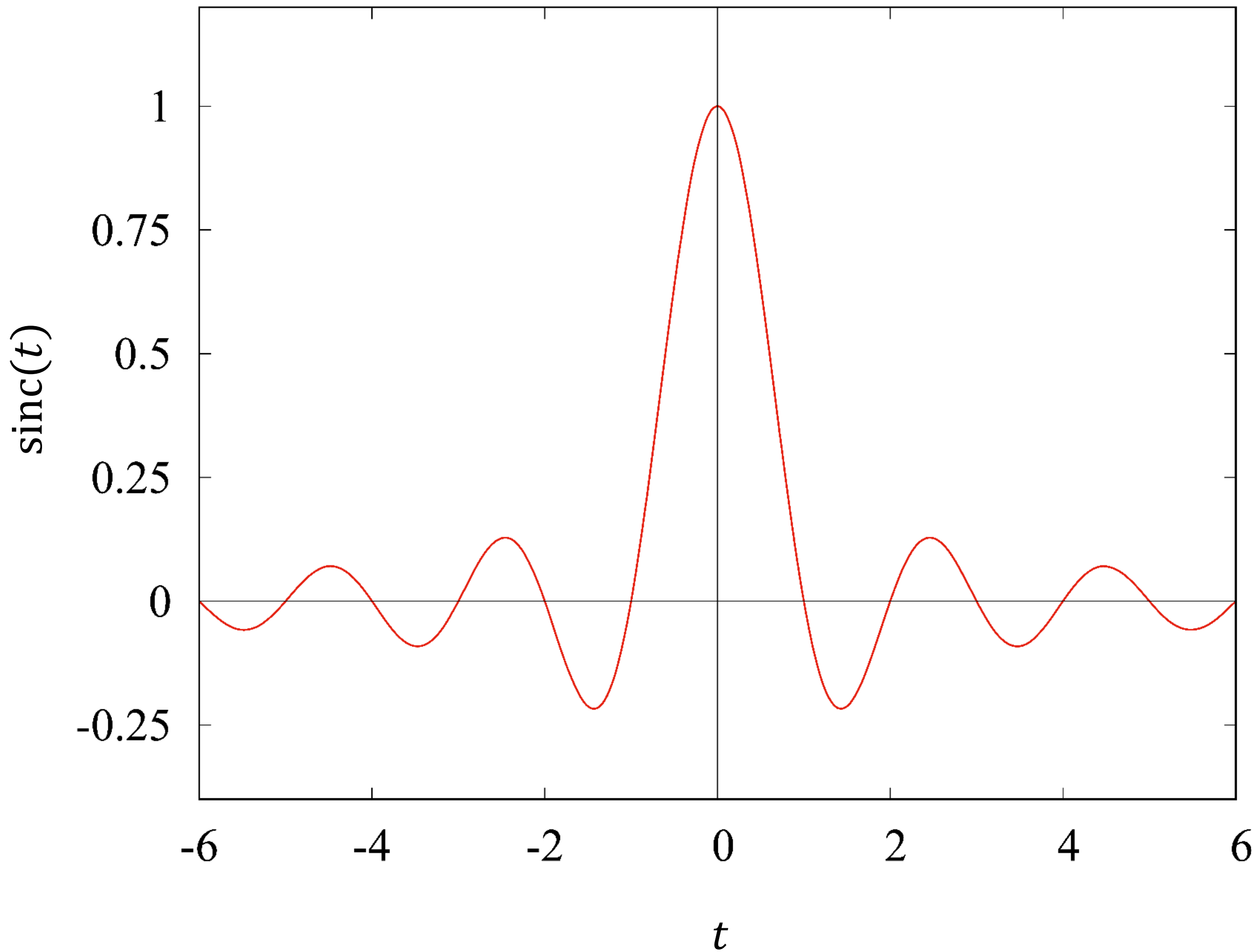
$$\mathrm{sinc}(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, \\ 0 & \text{for } n \neq 0. \end{cases}$$

∵ 定義より$\mathrm{sinc}(0) = 1$。$n \neq 0$に対して、

We have $\mathrm{sinc}(0) = 1$ due to the definition. For $n \neq 0$,

$$\mathrm{sinc}(n) = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} = 0. \qquad \blacksquare$$

$\mathrm{sinc}(x)$の関数形(Graw $\mathrm{sinc}(x)$)



フーリエ変換の性質(Properties of the Fourier transform)

実関数のフーリエ変換(The Fourier transform of real functions)

$g(t)$が実関数の場合、 $\overline{G(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j2\pi ft} dt = G(-f).$

For a real function $g(t)$,

非負の周波数$f \geq 0$に対するフーリエ変換$G(f)$ は、時間領域における実信号$g(t)$に関する全情報を含んでいる。

The Fourier transform $G(f)$ for non-negative $f \geq 0$ contains all information on the original real signal $g(t)$ in time domain.

注意(Remark)

$\overline{G(f)} \neq G(-f)$ ⟺ $g(t)$は複素関数

$g(t)$ is a complex function

ベースバンド信号は一般に複素関数である。

Baseband signals are complex functions in general.

周波数のシフト

Frequency shift

$g_0(t)$のフーリエ変換を$G_0(f)$とする。$g(t) = g_0(t)e^{j2\pi f_c t}$のフーリエ変換$G(f)$は以下を満たす。

Let $G_0(f)$ denote the Fourier transform of $g_0(t)$. The Fourier transform $G(f)$ of $g(t) = g_0(t)e^{j2\pi f_c t}$ satisfies

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(t)\, e^{-j2\pi(f-f_c)t} dt = G_0(f - f_c).$$

フーリエ変換(Fourier transform)

$$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt\,,\qquad g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df\,.$$

畳み込み(Convolution)

二つの関数$x(t)$と$y(t)$に対して、以下の演算を畳み込みと呼ぶ。

For two functions $x(t)$ and $y(t)$, the following operation is called convolution.

$$(x*y)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\,.$$

畳み込みのフーリエ変換(Fourier transform of the convolution)

畳み込み$z(t)=(x*y)(t)$のフーリエ変換$Z(f)$は、$x(t)$と$y(t)$それぞれのフーリエ変換$X(f)$と$Y(f)$の積に等しい。

The Fourier transform $Z(f)$ of the convolution $z(t)=(x*y)(t)$ is the product of the Fourier transforms $X(f)$ and $Y(f)$ of $x(t)$ and $y(t)$, respectively.

$$Z(f)=X(f)Y(f).$$

証明(Proof)

フーリエ変換$Z(f)$を計算し、重積分の順序を入れ替える。

Evaluate the Fourier transform $Z(f)$ and switch the order of integration in the double integral.

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right\} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi f t} dt \right\} d\tau .$$

tに関する積分で、$t' = t - \tau$と変数変換する。

Use the change of variables $t' = t - \tau$ in the integration with respect to t.

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t') e^{-j2\pi f (t'+\tau)} dt' = e^{-j2\pi f \tau} Y(f).$$

したがって、(Thus,)

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} Y(f)\, d\tau = X(f) Y(f). \qquad \blacksquare$$

演習(Exercises)

以下の関数$g(t)$のフーリエ変換$G(f)$を求めよ。

Evaluate the Fourier transform $G(f)$ of the following function $g(t)$:

$$g(t) = e^{-|t|}$$