

通信工学概論

Introduction to Communication Engineering

第4回講義資料

Lecture notes 4

ベースバンド及び高周波信号2

Baseband and radio-frequency signals 2

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授 竹内啓悟

Associate Professor Keigo Takeuchi

帯域制限信号(Band-limited signal)

例4.1 (Example 4.1)

$$x_b(t) = \sum_{n=-N}^N X_n \text{sinc}(Wt - n).$$

周波数領域表現(Frequency-domain representation)

$$X_b(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_b(t) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{n=-N}^N X_n \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Wt - n) e^{-j2\pi ft} dt$$

$Wt' = Wt - n$ と変数変換すると、(Under the change of variables $Wt' = Wt - n$)

$$\begin{aligned} X_b(f) &= \sum_{n=-N}^N X_n \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Wt') e^{-j2\pi f(t'+n/W)} dt' \\ &= H(f) \sum_{n=-N}^N X_n e^{-j2\pi n f/W}, \quad H(f) = \begin{cases} 1/W & \text{for } |f| \leq W/2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

最後は、例3.1の結果を使った。(The last follows from the result in Example 3.1.)

帯域制限信号の性質 (Properties of the band-limited signal)

$$X_b(f) = H(f) \sum_{n=-N}^N X_n e^{-j2\pi n f / W} .$$

周波数特性 (Frequency property)

周波数帯域は、区間 $[-W/2, W/2]$ に制限されている。

The frequency band is limited to the interval $[-W/2, W/2]$.

表現力 (Representation power)

離散時間アナログ信号 $\{X_n\}$ を適切に設計すると、周波数区間 $[-W/2, W/2]$ に帯域制限された任意のベースバンド信号を表現できる。

Any $[-W/2, W/2]$ -limited baseband signal can be represented via an appropriate design of the discrete-time analog signals $\{X_n\}$.

∴ $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を所望ベースバンド信号の複素フーリエ係数に設定すればよい。

Let $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ be the complex Fourier coefficients of a target baseband signal.

sinc関数の正規直交性(Orthonormality of the sinc function)

任意の実数 t および整数 m と n に対して、(For any integers m, n , and real t ,)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - m)\text{sinc}(t - n)dt = \begin{cases} 1 & \text{for } m = n, \\ 0 & \text{for } m \neq n. \end{cases}$$

∴ $t' = t - m$ と変数変換し、**対称性** $\text{sinc}(-x) = \text{sinc}(x)$ を使うと、
Use the change of variables $t' = t - m$ and the **symmetry** $\text{sinc}(-x) = \text{sinc}(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - m)\text{sinc}(t - n)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t')\text{sinc}(t' + m - n)dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t')\text{sinc}(n - m - t')dt' = (\text{sinc} * \text{sinc})(n - m). \end{aligned}$$

畳み込み $g(t) = (\text{sinc} * \text{sinc})(t)$ に対して、そのフーリエ変換 $G(f)$ は、

For the convolution $g(t) = (\text{sinc} * \text{sinc})(t)$, its Fourier transform $G(f)$ is given by

$$G(f) = H_0(f)H_0(f) = H_0(f), \quad H_0(f) = \begin{cases} 1 & \text{for } |f| \leq 1/2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

よって、(Thus,) $g(n - m) = \text{sinc}(n - m) = \begin{cases} 1 & \text{for } m = n, \\ 0 & \text{for } m \neq n. \end{cases}$

∴ **ナイキスト条件より**(Due to the Nyquist criterion.) ■

離散時間信号の復調(Demodulation of discrete-time signals)

$$x_b(t) = \sum_{n=-N}^N X_n \text{sinc}(Wt - n).$$

正規直交性を用いた復調(Demodulation based on orthonormality)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_b(t) \text{sinc}(Wt - n) dt = \sum_{n'=-N}^N X_{n'} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(Wt - n') \text{sinc}(Wt - n) dt = X_n$$

最後の等号は、sinc関数の正規直交性から従う。

The **last** follows from the orthonormality of the sinc function.

ナイキスト条件を用いた復調(Demodulation based on the Nyquist criterion)

$$Y_n = x_b\left(\frac{n}{W}\right) = \sum_{n'=-N}^N X_{n'} \text{sinc}(n - n') = X_n.$$

最後の等号は、sinc関数のナイキスト条件から従う。

The **last** follows from the Nyquist criterion of the sinc function.

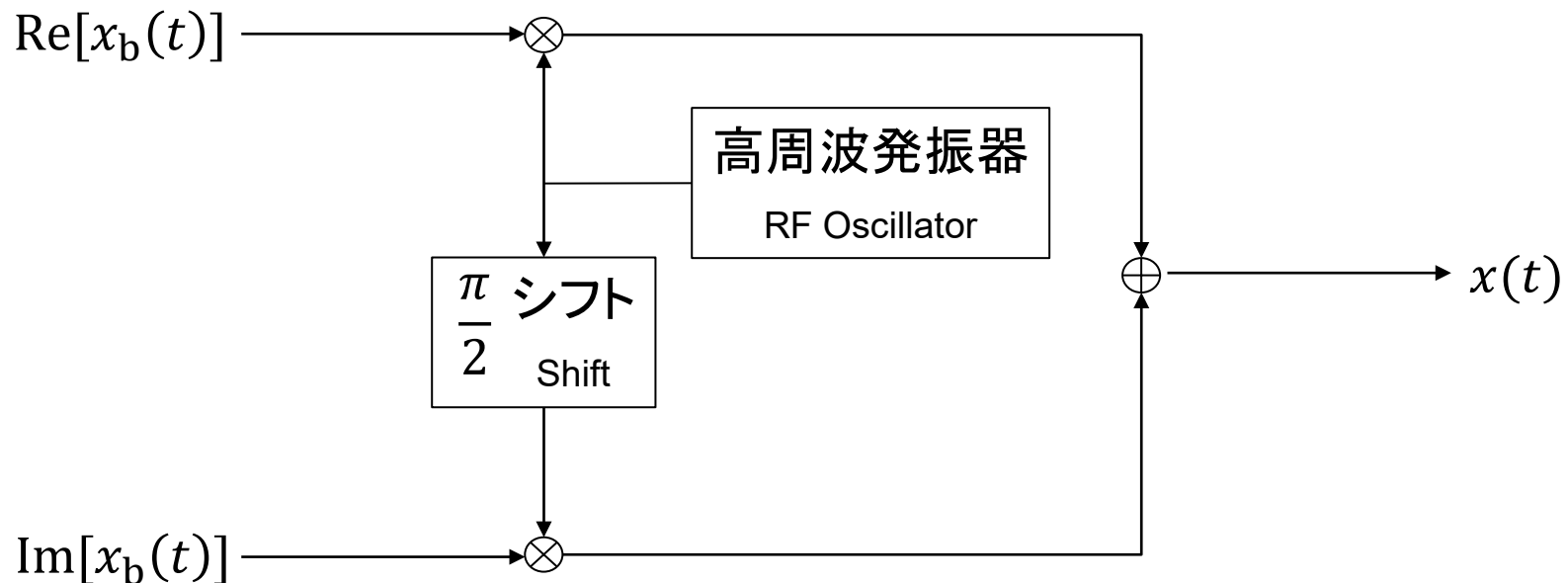
高周波信号への変調(Up-conversion to radio frequency (RF) signals)

帯域幅 W のベースバンド信号 $x_b(t)$ を中心周波数 $f_c (\gg W)$ の高周波信号 $x(t)$ に変換する。

Convert a baseband signal $x_b(t)$ with bandwidth W into an RF signal $x(t)$ with center frequency $f_c (\gg W)$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}[x_b(t)e^{-j2\pi f_c t}] \\ &= \operatorname{Re}[x_b(t)] \cos(2\pi f_c t) + \operatorname{Im}[x_b(t)] \sin(2\pi f_c t). \end{aligned}$$

In-phase (I)成分(component) Quadrature (Q)成分(component)

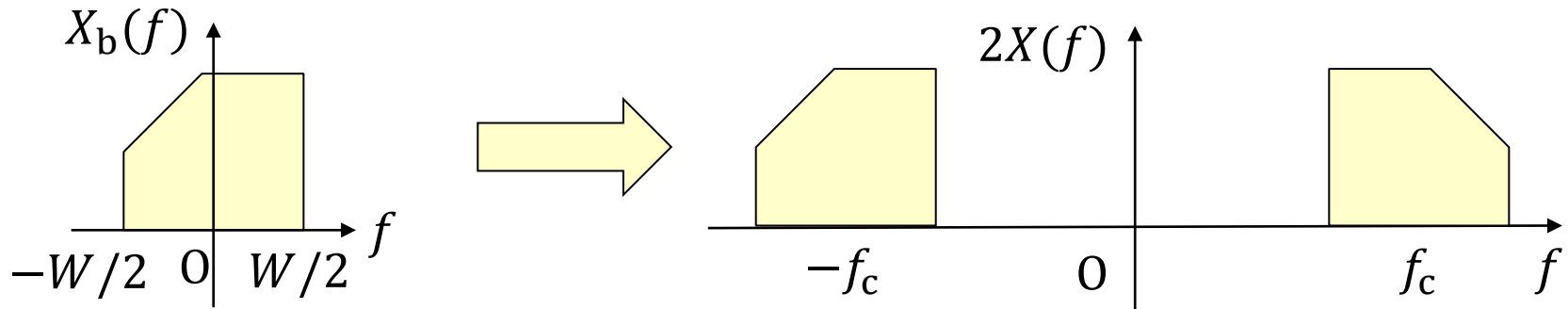


直交振幅変調(Quadrature amplitude modulation (QAM))

証明(Proof)

周波数領域で変調を設計し、時間領域に戻す。

Design the up-conversion in frequency domain and represent it in time domain.



$$2X(f) = \overline{X_b(f_c - f)} + X_b(f_c + f).$$

$x(t)$ は実信号

$x(t)$ is a real signal

$$2\overline{X(f)} = X_b(f_c - f) + \overline{X_b(f_c + f)} = 2X(-f).$$

時間領域表現

Time-domain
representation

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} X_b(f_c - f) e^{-j2\pi f t} df} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X_b(f_c + f) e^{j2\pi f t} df \\ &= \frac{1}{2} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} X_b(f') e^{j2\pi(f' - f_c)t} df'} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X_b(f') e^{j2\pi(f' - f_c)t} df' \\ &= \frac{1}{2} \overline{x_b(t) e^{-j2\pi f_c t}} + \frac{1}{2} x_b(t) e^{-j2\pi f_c t} = \text{Re}[x_b(t) e^{-j2\pi f_c t}] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ベースバンド信号への復調(Down-conversion to baseband signals)

搬送波周波数 f_c 、帯域幅 W の高周波信号を $x(t)$ 、そのフーリエ変換を $X(f)$ とする。

Let $x(t)$ and $X(f)$ be an RF signal with carrier frequency f_c and bandwidth W and its Fourier transform.

時間領域表現

Time-domain representation

$$y_b(t) = 2W \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j2\pi f_c \tau} \text{sinc}(W(t - \tau)) d\tau.$$

周波数領域表現

Frequency-domain representation

$$Y_b(f) = 2WX(f - f_c)H(f).$$

$H(f)$ は以下で与えられる $\text{sinc}(Wt)$ のフーリエ変換である。(例3.1参照)

$H(f)$ denotes the Fourier transform of $\text{sinc}(Wt)$. (See Example 3.1.)

$$H(f) = \begin{cases} 1/W & \text{for } |f| \leq W/2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ベースバンド信号への復調(Down-conversion to the baseband signal)

$$y_b(t) = x_b(t).$$

証明(Proof)

高周波信号の周波数領域表現 $2X(f) = \overline{X_b(f_c - f)} + X_b(f_c + f)$ を利用する。

Use the frequency-domain representation of the RF signal $2X(f) = \overline{X_b(f_c - f)} + X_b(f_c + f)$.

周波数シフト

Frequency shift

$$2X(f - f_c) = \overline{X_b(2f_c - f)} + X_b(f).$$

ローパスフィルタ

Low-pass filter

$$Y_b(f) = 2WX(f - f_c)H(f) = WX_b(f)H(f) = X_b(f).$$

∴ $X_b(f)$ は帯域制限信号 ($X_b(t)$ is band-limited.)

$X(f - f_c)$ の時間領域表現

Time-domain representation of $X(f - f_c)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f - f_c) e^{j2\pi f t} df = x(t) e^{j2\pi f_c t}.$$

第3回講義資料を参照 (See the lecture notes 3.)

時間領域表現

Time-domain representation

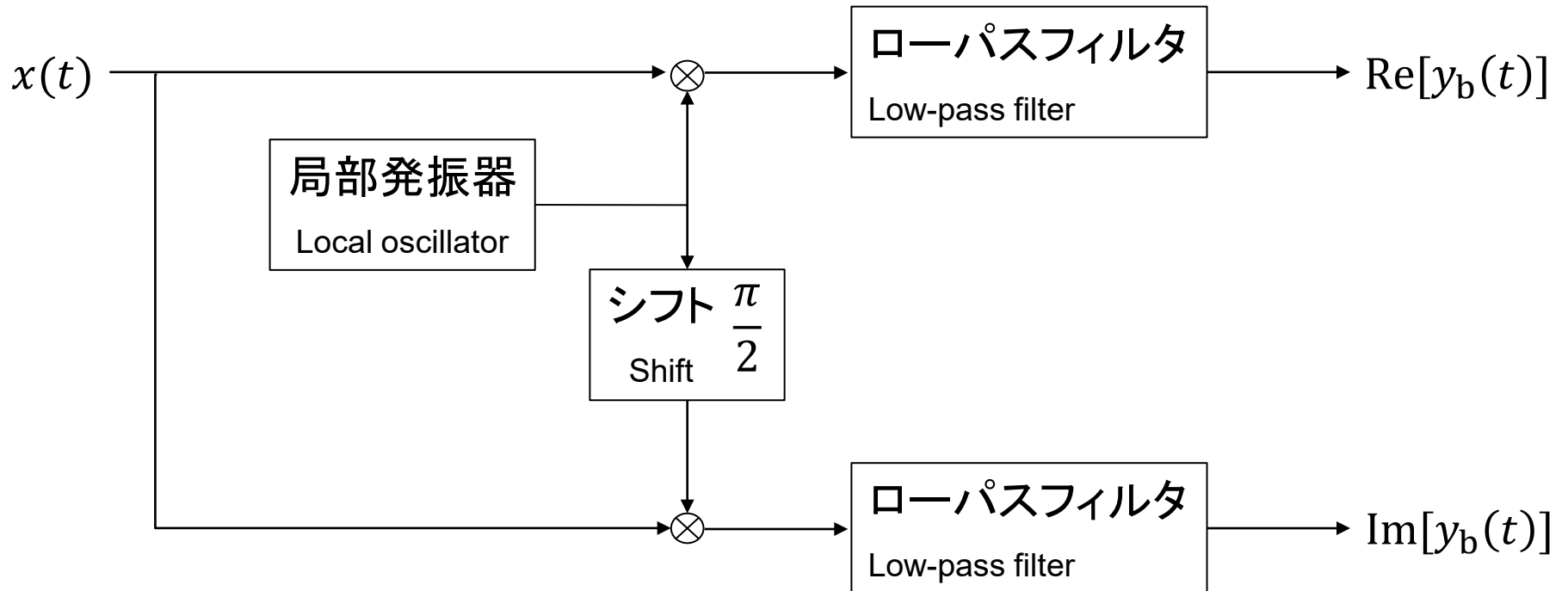
畳み込みの性質より、(From the property of the convolution,)

$$y_b(t) = 2Wx(t)e^{j2\pi f_c t} * \text{sinc}(Wt)$$

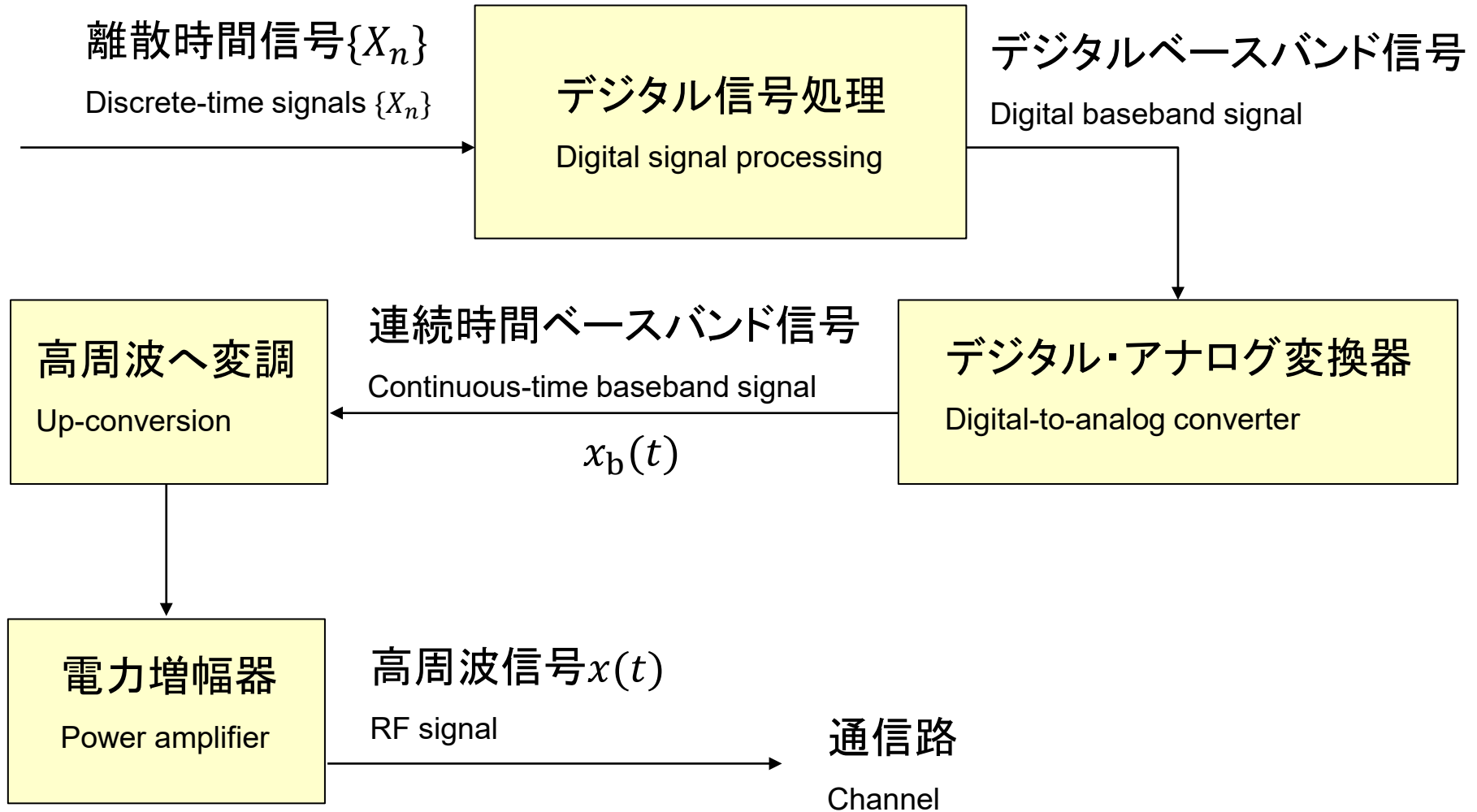
$$= 2W \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j2\pi f_c \tau} \text{sinc}(W(t - \tau)) d\tau. \quad \blacksquare$$

ベースバンド信号への復調(Down-conversion to baseband signals)

$$y_b(t) = 2W \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j2\pi f_c \tau} \text{sinc}(W(t - \tau)) d\tau.$$



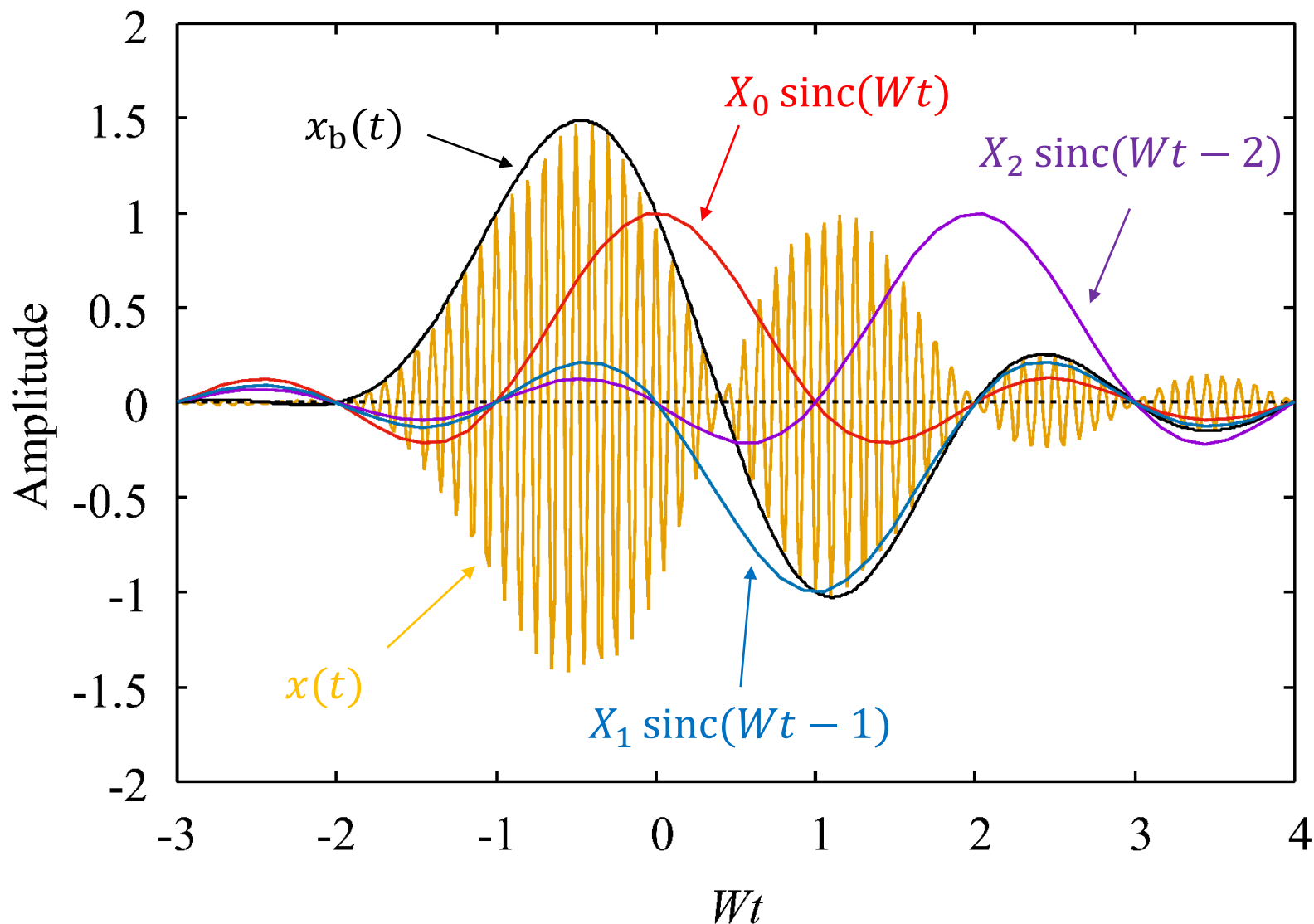
送信器(Transmitter)



※高周波への変調までをデジタル信号処理で行う場合もある。

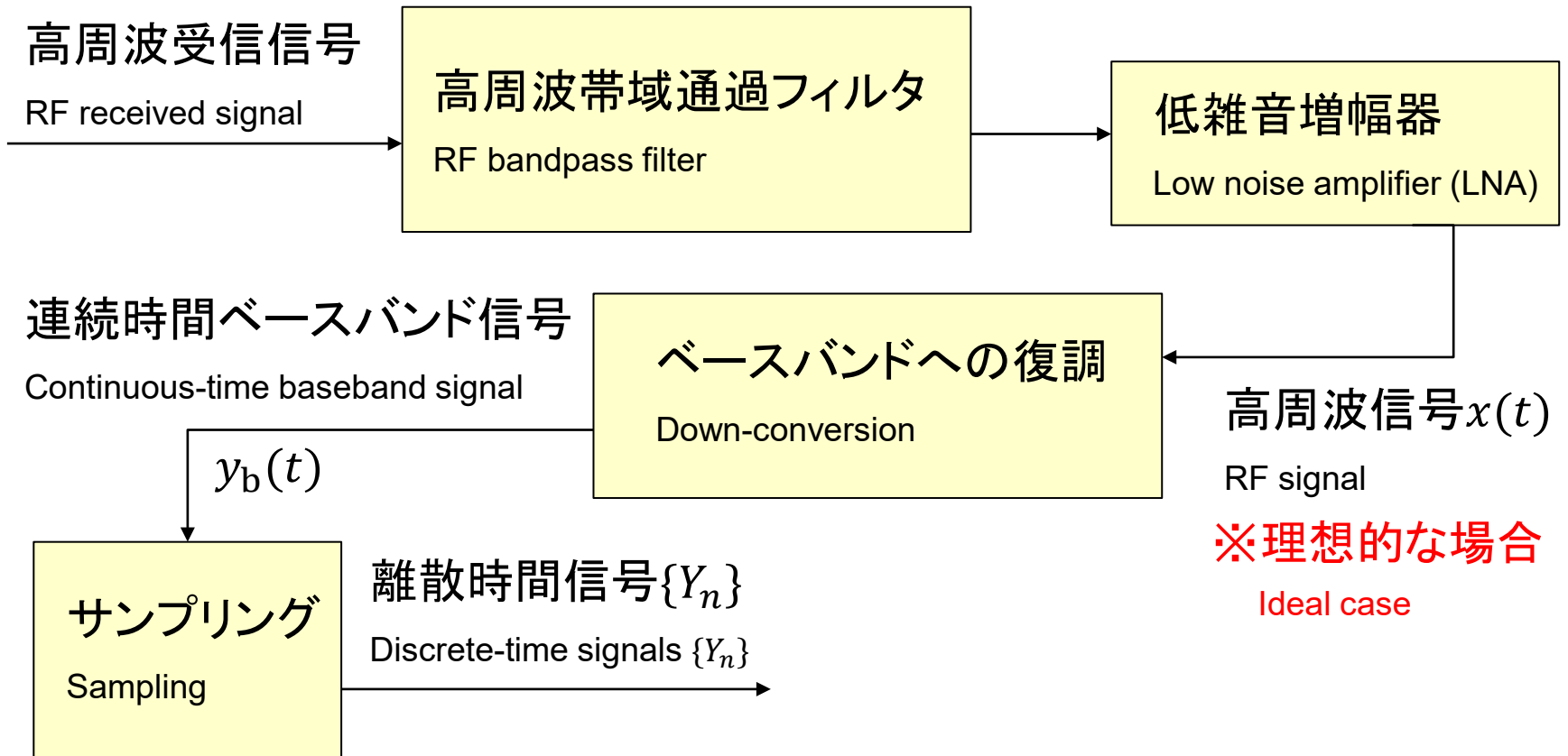
Digital signal processing may be used for the up-conversion.

高周波信号の例(Example of RF signals)



$N = 2, X_{-2} = X_{-1} = 0, X_0 = 1, X_1 = -1, X_2 = 1, f_c = 10W$ の場合

受信器(Receiver)



※ベースバンドへの復調もデジタル信号処理で行う場合がある。

Digital signal processing may be used for the down-conversion.

演習(Exercise)

以下のコサインロールオフフィルタ $G(f)$ の逆フーリエ変換 $g(t)$ を求めよ。

Evaluate the inverse Fourier transform $g(t)$ of the following raised-cosine filter $G(f)$:

$$G(f) = \begin{cases} 1 & \text{for } |f| \leq 1 - \alpha, \\ G_c(f) & \text{for } 1 - \alpha < |f| \leq 1 + \alpha, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$
$$G_c(f) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{2\alpha} [|f| - (1 - \alpha)] \right\}.$$

ただし、 $4\alpha t \neq \pm 1$ と $t \neq 0$ を仮定せよ。(Here, assume $4\alpha t \neq \pm 1$ and $t \neq 0$.)

