通信工学概論

Introduction to Communication Engineering

第5回講義資料

Lecture notes 5

デジタル変調と通信路

Digital modulation and channel

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授　竹内啓悟

Associate Professor　Keigo Takeuchi

デジタル変調の例 (Example of digital modulation)

例5.1 (Example 5.1)

$\{-3, -1, 1, 3\}$のいずれかを等確率で取る4PAM信号を考える。
4PAM信号を表す離散確率変数Xを定義せよ。

Consider a 4 PAM signal that takes -3, -1, 1, or 3 with uniform probability. Define a discrete random variable X that represents the 4 PAM signal.

$$\mathbb{P}(X = -3) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{4}$$

デジタル信号は、離散確率変数を使って表現できる。

A digital signal can be represented with a discrete random variable.

なぜデジタル変調を使うのか？(Why is digital modulation used?)

デジタル変調を使う理由（Reason why digital modulation is used）

費用対効果が良いから（Good cost-effectiveness）

古典的な理由は間違っている？(Classical reasons might not be correct.)

1. アナログ信号を生成する効率的な誤り訂正符号がない。（誤）
   No efficient error-correcting codes generating analog signals (Not correct)

   空間結合スパース重ね合わせ符号（Spatially coupled superposition coding）

2. 送受信機でデジタル･アナログ/アナログ･デジタル変換器を使うから。（誤）
   Due to digital-to-analog/analog-to-digital converters in the transmitter/receiver (Not correct)

3. ダイナミックレンジが有限の電力増幅器を使うから。（誤）
   Due to power amplifiers with finite dynamic range (Not correct)

   圧縮センシングで解決可能（Solvable by compressed sensing）

ただし、実現には高性能（高コスト）なハードウェアが必要。
Unfortunately, high-performance (high-cost) hardware devices are required.

確率とは何か？ (What is probability?)

確率とは相対頻度である。(Probability is a relative frequency.)

例5.2 (Example 5.2)

コインを投げると、確率1/2で表が出る。(A head occurs with probability 1/2 in tossing a coin.)

⇒ 百万回コインを投げると、約50万回表が出る。

Heads occur approximately half a million times when a coin is tossed one million times.

例5.3 (Example 5.3)

サイコロを振ると、確率1/6で2が出る。(2 occurs with probability 1/6 in rolling a dice.)

⇒ 6百万回サイコロを振ると、約百万回2が出る。

2 occurs approximately one million times when a dice is rolled six million times.

非一様な確率(Non-uniform probability)

発生確率は常に等確率というわけではない。

Occurrence probability is not always uniform.

例5.4

Example 5.4

サイコロを振ると、２以下の目が確率1/3で出る。

The eyes on the dice are less than 3 with probability $1/3$ in rolling a dice.

↓

サイコロを3百万回振ると、２以下の目が約百万回出る。

The eyes become less than 3 approximately one million times when a dice is rolled three million times.

サイコロの目(Eyes on the dice)	出た回数(Number of occurrences)
1	498616
2	500986
3	501127
.	…
.	…

確率変数(Random variables)

確率変数は、発生する事象に応じて割り当てられた実数値を取る。

A random variable takes real numbers allocated according to occurrence events.

例5.5(Example 5.5)

サイコロを振ったときに、出た目に千円をかけた賞金が得られるゲームを行う。

賞金を表す離散確率変数Xを定義せよ。

In rolling a dice, you get one thousand yen times the number equal to the eye. Define a discrete random variable X that represents the prize money in this game.

$X = 1000$となる確率は$1/6$である。 ⇨ $\mathbb{P}(X = 1000) = 1/6$と書く。

$X = 1000$ holds with probability $1/6$. We write this as $\mathbb{P}(X = 1000) = 1/6$.

同様に、$\mathbb{P}(X = 2000) = 1/6$、・・・、$\mathbb{P}(X = 6000) = 1/6$を得る。

Similarly, we have $\mathbb{P}(X = 2000) = 1/6, \ldots, \mathbb{P}(X = 6000) = 1/6$.

離散確率変数を定義するとは、各値を取る確率を定めることである。

A discrete random variable is defined via determining probabilities with which it takes all possible values.

平均とは何か？(What is mean?)

実数列$\{a_1, \dots, a_N\}$に対して、(For a real sequence $\{a_1, \dots, a_N\}$,)

算術平均(Arithmetic mean)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{N}$$

算術平均は統計学における標本平均と同じである。

The arithmetic mean is the same as sample mean in statistics.

幾何平均(Geometric mean)

$$\left(\prod_{n=1}^{N} a_n\right)^{1/N} = \sqrt[N]{a_1 a_2 \cdots a_N}$$

確率論で扱う平均は、このいずれでもない。

Mean in probability theory is neither the arithmetic nor geometric mean.

確率論における平均の例 (Example of mean in probability theory)

例5.6(Example 5.6)

例5.5のゲームを百万回行ったときに、得られる賞金の算術平均を答えよ。

Answer the arithmetic mean of the prize money obtained via one million game trials in Example 5.5.

サイコロの目 Eyes on the dice	出た回数 Number of occurrences	賞金総額 Total prize money
1	165740	165740000
2	166951	333902000
3	165564	496692000
4	165918	663672000
5	167749	838745000
6	168078	1008468000

賞金総額の算術平均は、(The arithmetic mean of the total prize money is)

$$\frac{165740000 + 333902000 + \cdots + 1008468000}{1000000} = 3507.219 \approx 3.5 \times 10^3$$

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

確率論における平均の例 (Example of mean in probability theory)

例5.7 (Example 5.7)

例5.5のゲームを無限回行ったときに、得られる賞金の算術平均を答えよ。

Answer the arithmetic mean of the prize money obtained via infinite game trials in Example 5.5.

ゲームの試行回数をnとし、サイコロの目$i\,(=1,2,\ldots,6)$が出た回数をn_iとすると、

For n game trials, let n_i denote the number of occurrences for the eye i $(=1,2,\ldots,6)$ on the dice.

$$\frac{1}{n}(1000n_1+2000n_2+3000n_3+4000n_4+5000n_5+6000n_6)$$

$$=1000\frac{n_1}{n}+2000\frac{n_2}{n}+3000\frac{n_3}{n}+4000\frac{n_4}{n}+5000\frac{n_5}{n}+6000\frac{n_6}{n}$$

極限$n\to\infty$において、相対頻度n_i/nは確率$1/6$に収束するので、

The relative frequency n_i/n tends to probability $1/6$ in the limit $n\to\infty$. Thus,

$$\to 1000\frac{1}{6}+2000\frac{1}{6}+3000\frac{1}{6}+4000\frac{1}{6}+5000\frac{1}{6}+6000\frac{1}{6}=3500 \quad \blacksquare$$

確率論における平均の例 (Example of mean in probability theory)

例5.8(Example 5.8)

サイコロを振ったときに、2以下の目が出たときに千円を、それ以外の場合に2千円を獲得できるゲームを考える。このゲームを無限回行ったときに得られる賞金の算術平均を答えよ。

Suppose that one thousand yen is obtained in rolling a dice when the eye on the dice is smaller than 3. Otherwise, two thousand yen is obtained. Answer the arithmetic mean of the total prize money obtained in infinite trials of this game.

ゲームの試行回数をnとし、千円と二千円が得られた回数をそれぞれn_1とn_2とする。

For n game trials, let n_1 and n_2 denote the number of events in which one or two thousand yen has been obtained, respectively.

$$\frac{1000n_1 + 2000n_2}{n} = 1000\frac{n_1}{n} + 2000\frac{n_2}{n} \rightarrow 1000\frac{1}{3} + 2000\frac{2}{3} = \frac{5000}{3}$$

極限は、相対頻度n_1/nとn_2/nがそれぞれ確率$1/3$と$2/3$に収束するため。

The limit holds because the relative frequency n_1/n and n_2/n tends to probability $1/3$ and $2/3$, respectively.

確率論における平均 (Mean in probability theory)

K個の離散値$\{x_k: k = 1, \ldots, K\}$をそれぞれ確率$p_k$で取る離散確率変数$X$の平均$\mathbb{E}[X]$は以下で定義される。

Let X denote a discrete random variable that takes K discrete values $\{x_k: k = 1, \ldots, K\}$ with probability p_k, respectively. The mean $\mathbb{E}[X]$ of X is defined as follows:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{K} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_K p_K$$

実現値にその発生確率をかけた項の総和

Summation of realizations multiplied by the corresponding occurrence probability

期待値(Expectation)

確率変数を含まない決定論的な実関数をfとする。上記の確率変数Xに対して、$f(X)$の期待値$\mathbb{E}[f(X)]$は以下で定義される。

Let f denote a deterministic real function that contains no random variables. For the random variable defined above, the expectation of $f(X)$ is defined as follows:

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{k=1}^{K} f(x_k) p_k = f(x_1) p_1 + f(x_2) p_2 + \cdots + f(x_K) p_K$$

注意(Remarks)

- 恒等写像$f(x)=x$の場合の期待値$\mathbb{E}[f(X)]=\mathbb{E}[X]$を平均と呼ぶ。

  For the identity mapping $f(x)=x$, the expectation $\mathbb{E}[f(X)]=\mathbb{E}[X]$ is called mean.

- $f(x)=(x-\mathbb{E}[X])^2$の場合の期待値$\mathbb{V}[X]=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$を分散と呼ぶ。

  For $f(x)=(x-\mathbb{E}[X])^2$, the expectation $\mathbb{V}[X]=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$ is called variance.

- 例5.7の場合(In the case of Example 5.7,)

  $$x_1=1000, x_2=2000, x_3=3000, x_4=4000, x_5=5000, x_6=6000$$

  $$p_k=\mathbb{P}(X=x_k)=\frac{1}{6}\ \text{for}\ k=1,2,\dots,6$$

- 例5.8の場合(In the case of Example 5.8,)

  $$x_1=1000, \qquad x_2=2000$$

  $$p_1=\mathbb{P}(X=x_1)=\frac{1}{3}, \qquad p_2=\mathbb{P}(X=x_2)=\frac{2}{3}$$

データ通信の歴史(History of data communication)

	有線(Wired)	無線(Wireless)
1990～	固定電話網 Telephone network 0.3 kbps～56 kbps	第2世代移動通信（2G） ～28.8 kbps
2000～	ADSL ～47 Mbps	第3世代移動通信(3G) 384 kbps～42 Mbps
	ツイストペアケーブル Twisted pair cable ～10 Gbps	
2010～	光ファイバーケーブル Optical fiber cable ～250 Tbps (2021)	第4世代移動通信(4G) 326 Mbps～1.7 Gbps
2020～		第5世代移動通信(5G) 4.2 Gbps～

表を作成する際、社会への普及状況を考慮した。

Popularization in society was taken into account in creating the table.

通信路の例(Examples of channels)

有線(Wired)

通信路(Channels)

同軸ケーブル、電話線、ツイストペアケーブル、光ファイバー、電力線

Coaxial cable, telephone line, Twisted pair cable, Optical fiber cable, power line

信号(Signals)

電気信号、波長が1000 nm～1675 nmの光信号

Electronic signals and optical signals with wavelength between 1000 nm and 1675 nm

無線(Wireless)

通信路(Channels)

空気中、真空中、海中(Air, vacuum, and underwater)

信号(Signals)

波長が0.1 mm以上の電磁波、波長が380 nm以上の光信号

Radio waves, optical signals with wavelength longer than 380 nm

通信路の条件(Conditions of channels)

以下の条件を満たせば、何でも通信路として利用できる。

Everything is available as a channel if the following conditions are satisfied:

可到達性(Reachability)

送信信号が受信者まで届く。(Transmitted signals reach the receiver.)

高伝搬速度(High propagation velocity)

送信信号が速く伝搬する。(Transmitted signals propagate at high speed.)

大容量性(Large capacity)

多くの情報を伝送できる。(A lot of information can be transmitted.)

低コスト性(Low cost)

低コストで通信できる。(Low-cost communication is available.)

演習 (Exercise)

例5.1で定義した4PAM信号を表す離散確率変数Xの平均と分散を計算せよ。

Compute the mean and variance of the discrete random variable X that represents 4 PAM signals defined in Example 5.1.

通信に関する注意(Remarks on Communications)

デジタル変調信号Xの平均$\mathbb{E}[X]$は、0でなければならない。

Digital modulation signals X must have zero mean $\mathbb{E}[X] = 0$.

デジタル変調信号Xの分散$\mathbb{V}[X]$は、平均電力$P = \mathbb{E}[X^2]$に等しい。

The variance $\mathbb{V}[X]$ of a digital modulation signal X is equal to the average power $P = \mathbb{E}[X^2]$.