通信工学概論

Introduction to Communication Engineering

第6回講義資料

Lecture notes 6

ガウス雑音

Gaussian Noise

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授　竹内啓悟

Associate Professor　Keigo Takeuchi

熱雑音(Thermal noise)

抵抗等の受信回路内の素子では、熱雑音が発生する。

Thermal noise occurs in circuit elements in the receiver, such as resistors.

加法性(Additivity)

熱雑音は信号振幅に足し算される。(Thermal noise is added to the signal amplitude.)

白色性 (Whiteness)

熱雑音をどんな速さでサンプリングしても、サンプル値は独立である。

Samples of thermal noise are independent regardless of the sampling rate.

ガウス性(Gaussianity)

各サンプル値は平均0のガウス分布に従う。

Each sample of thermal noise is zero-mean and Gaussian-distributed.

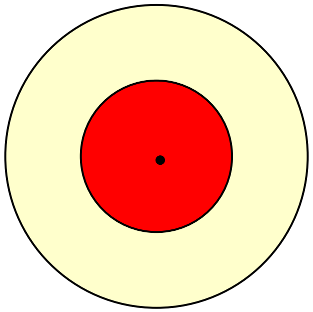
熱雑音を加法的白色ガウス雑音とみなす。

We regard thermal noise as additive white Gaussian noise (AWGN).

連続確率変数の定義に向けて(Toward the definition of continuous random variables)

例6.1

Example 6.1



矢を的に向かって投げたときに、矢の先端が的の中心点に当たる確率を答えよ。ただし、矢の先端は的と一点で接するものとする。

Answer the probability with which, in throwing an arrow toward the target, the arrowhead hits the center point of the target. Assume that the arrowhead touches a point on the target.

答え(Answer)　0

背理法による証明(Proof by contradiction)

名手の投げた矢の先端は、的の中心点を中心とする微小円盤上で一様分布すると仮定する。中心点に当たる確率を$p > 0$とすると、円盤内の他の点に当たる確率もpである。すると、円盤上に点は無限にあるので、微小円盤内の点に当たる確率の総和が1を超えてしまう。したがって、的の中心に当たる確率は$p = 0$である。

Suppose that, with uniform probability, the arrowhead thrown by an expert player hits a point inside a small disk of which the center is the center point of the target. Assume that the arrowhead hits the center point with probability $p > 0$. Then, the summation of probabilities with which the arrowhead hits points inside the small disk is above 1 because the small disk contains an infinite number of points. Thus, the answer is $p = 0$.

連続確率変数の定義(Definition of continuous random variables)

連続確率変数では、点ではなく、集合に入る確率を議論する。

For continuous random variables, we discuss an inclusion probability not at a point but inside a set.

定義の方針(Definition direction)

連続確率変数Xがすべての区間$[a,b]$に含まれる確率を定義すればよい。

Sufficient to define a probability with which a continuous random variable X is contained in any interval $[a,b]$.

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = ?$$

確率は自由に割り当てられるわけではない。

The probabilities cannot be necessarily set freely.

加法性(Additivity)

$$\mathbb{P}(X \in [a\,,b] \cup [c,d]) = \mathbb{P}(X \in [a,b]) + \mathbb{P}(X \in [c,d]) \quad \text{for } b < c$$

例6.2(Example 6.2)

定義$\mathbb{P}(X < 0) = 1/3$と$\mathbb{P}(X \geq 0) = 1/3$の問題点を指摘せよ。

Point out a problem in the definitions $\mathbb{P}(X < 0) = 1/3$ and $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1/3$.

$$\mathbb{P}\big(X \in (-\infty, \infty)\big) = \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X \geq 0) = \frac{2}{3} < 1.$$

全事象の発生確率が1にならない。(The occurrence probability of all events is not 1.)

連続確率変数の定義(Definition of continuous random variables)

例6.3(Example 6.3)

定義$\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 2/3$と$\mathbb{P}(X \in [0,2]) = 1/3$の問題点を指摘せよ。

Point out a problem in the definitions $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 2/3$ and $\mathbb{P}(X \in [0,2]) = 1/3$.

$$\mathbb{P}(X \in (1,2]) = \mathbb{P}(X \in [0,2]) - \mathbb{P}(X \in [0,1]) = -\frac{1}{3} < 0$$

単調性 Monotonicity

区間$[a,b]$が区間$[c,d]$に含まれるならば、

If the interval $[a,b]$ is included in the interval $[c,d]$,

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) \leq \mathbb{P}(X \in [c,d])$$

(累積)分布関数 (Cumulative) distribution function

$$P_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

- $P_X(x)$は単調非減少

  $P_X(x)$ is monotonically non-decreasing.

- $\lim_{x\to\infty} P_X(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} P_X(x) = 0$

連続確率変数の定義(Definition of continuous random variables)

確率密度関数(Probability density function)

以下を満たす関数p_Xを連続確率変数Xの確率密度関数と呼ぶ。

A function p_X satisfying the following is called the probability density function of a continuous random variable X.

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(x')dx'$$

意味(Meaning)

連続確率変数Xが、区間$[a, b]$に入る確率は以下の積分で与えられる。

A continuous random variable X is included in the interval $[a, b]$ with probability given in the following integral:

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{a}^{b} p_X(x)dx$$

連続確率変数Xは、次ページにまとめる性質を満たす確率密度関数を与えることで定義される。

A continuous random variable X is defined via a probability density function that satisfies properties presented in the next page.

確率密度関数の性質(Properties of probability density functions)

非負性(Non-negativity)

$$p_X(x) \geq 0$$

$\because$ 微分積分学の基本定理から、(From the fundamental theorem of calculus)

$$P'_X(x) = p_X(x) \geq 0$$

不等式は分布関数の単調非減少性から従う。

The inequality is because the distribution function is monotonically non-decreasing.

正規化(Normalization)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$$

$\because$ 性質 $\lim_{x\to\infty} P_X(x) = 1$から、(From the property $\lim_{x\to\infty} P_X(x) = 1$)

$$1 = \lim_{x\to\infty} P_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx$$

連続確率変数の期待値(Expectation of a continuous random variable)

決定論的な関数fと連続確率変数Xに対して、期待値$\mathbb{E}[f(X)]$は以下で定義される。

For a deterministic function f and a continuous random variable X, the expectation $\mathbb{E}[f(X)]$ is defined as

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x) dx$$

定義の意義(Significance of the definition)

$f(x) = x$として、定義は離散の場合の自然な拡張になっていることを確認する。

Let $f(x) = x$ and confirm that the definition is a natural generalization of the discrete case.

区間$(-\infty, \infty)$をN個の区間に分割し、Xが$(x_n, x_{n+1}]$に入る確率をp_nとする。

Decompose $(-\infty, \infty)$ into N intervals and let p_n denote the probability with which X is included in $(x_n, x_{n+1}]$.

$$(-\infty, \infty) = (x_1, x_2] \cup (x_2, x_3] \cup \cdots \cup (x_N, x_{N+1}),$$

$$-\infty = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N+1} = \infty,$$

$$p_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_X(x) dx$$

Xの期待値を上下から近似する離散確率変数を、それぞれ$\overline{X}_N$と$\underline{X}_N$とする。

Let $\overline{X}_N$ and $\underline{X}_N$ denote discrete random variables that approximate the expectation of X from above and below, respectively.

$$\mathbb{P}(\overline{X}_N = x_{n+1}) = p_n,$$

$$\mathbb{P}(\underline{X}_N = x_n) = p_n,$$

$$\mathbb{E}[\underline{X}_N] \leq \mathbb{E}[\overline{X}_N]$$

連続確率変数の期待値(Expectation of a continuous random variable)

すべてのnに対して、$x_{n+1} - x_n \to 0$となる極限$N \to \infty$で以下を確認する。

Confirm the following in the limit $N \to \infty$, where $x_{n+1} - x_n \to 0$ holds for any n.

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[\overline{X}_N] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[\underline{X}_N] = \mathbb{E}[X]$$

$p_n^{\min} = \min_{x\in(x_n,x_{n+1}]} p_X(x)$とする。(Let $p_n^{\min} = \min_{x\in(x_n,x_{n+1}]} p_X(x)$.)

$x \in (x_n, x_{n+1}]$に対して$p_n \geq p_n^{\min}(x_{n+1} - x_n)$なので、

For $x \in (x_n, x_{n+1}]$, we have $p_n \geq p_n^{\min}(x_{n+1} - x_n)$. Thus,

$$\mathbb{E}[\underline{X}_N] = \sum_{n=1}^{N} x_n\, p_n \geq \sum_{n=1}^{N} x_n\, p_n^{\min}(x_{n+1} - x_n) \to \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \mathbb{E}[X]$$

同様に、$p_n^{\max} = \max_{x\in(x_n,x_{n+1}]} p_X(x)$とすると、

Similarly, let $p_n^{\max} = \max_{x\in(x_n,x_{n+1}]} p_X(x)$. Then,

$$\mathbb{E}[\overline{X}_N] = \sum_{n=1}^{N} x_{n+1}\, p_n \leq \sum_{n=1}^{N} x_{n+1}\, p_n^{\max}(x_{n+1} - x_n) \to \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \mathbb{E}[X] \quad \blacksquare$$

ガウス分布(Gaussian distribution)

連続確率変数Xの確率密度関数p_Xが以下で与えられるとき、Xはガウス分布に従うと言い、$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$と書く。

A continuous random variable X is said to follow the Gaussian distribution and written as $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ if the probability density function p_X of X is given by

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

ガウス分布は、確率論では正規分布とも呼ばれる。

The Gaussian distribution is also called normal distribution in probability theory.

注意(Remark)

確率密度関数p_Xは、正規化条件を満たす。(証明省略)

The probability density function satisfies the normalization. (The proof is omitted.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

ガウス分布の平均(Mean of the Gaussian distribution)

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$に対して、(For $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,)

$$\mathbb{E}[X] = \mu$$

証明(Proof)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$u = x - \mu$と変数変換すると、(Under the change of variables $u = x - \mu$,)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = \mu$$

2番目の等号は被積分関数の奇関数性、最後の等号は確率密度関数の正規化条件から従う。

The second equality is because the integrand is an even function. The last follows from the normalization of the probability density function.

ガウス分布の分散(Variance of the Gaussian distribution)

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$に対して、(For $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,)

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sigma^2$$

証明(Proof)

$$\mathbb{V}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$u = (x-\mu)/\sigma$と変数変換し、部分積分を行うと、

After the change of variables $u = (x-\mu)/\sigma$, performing the integration by parts yields

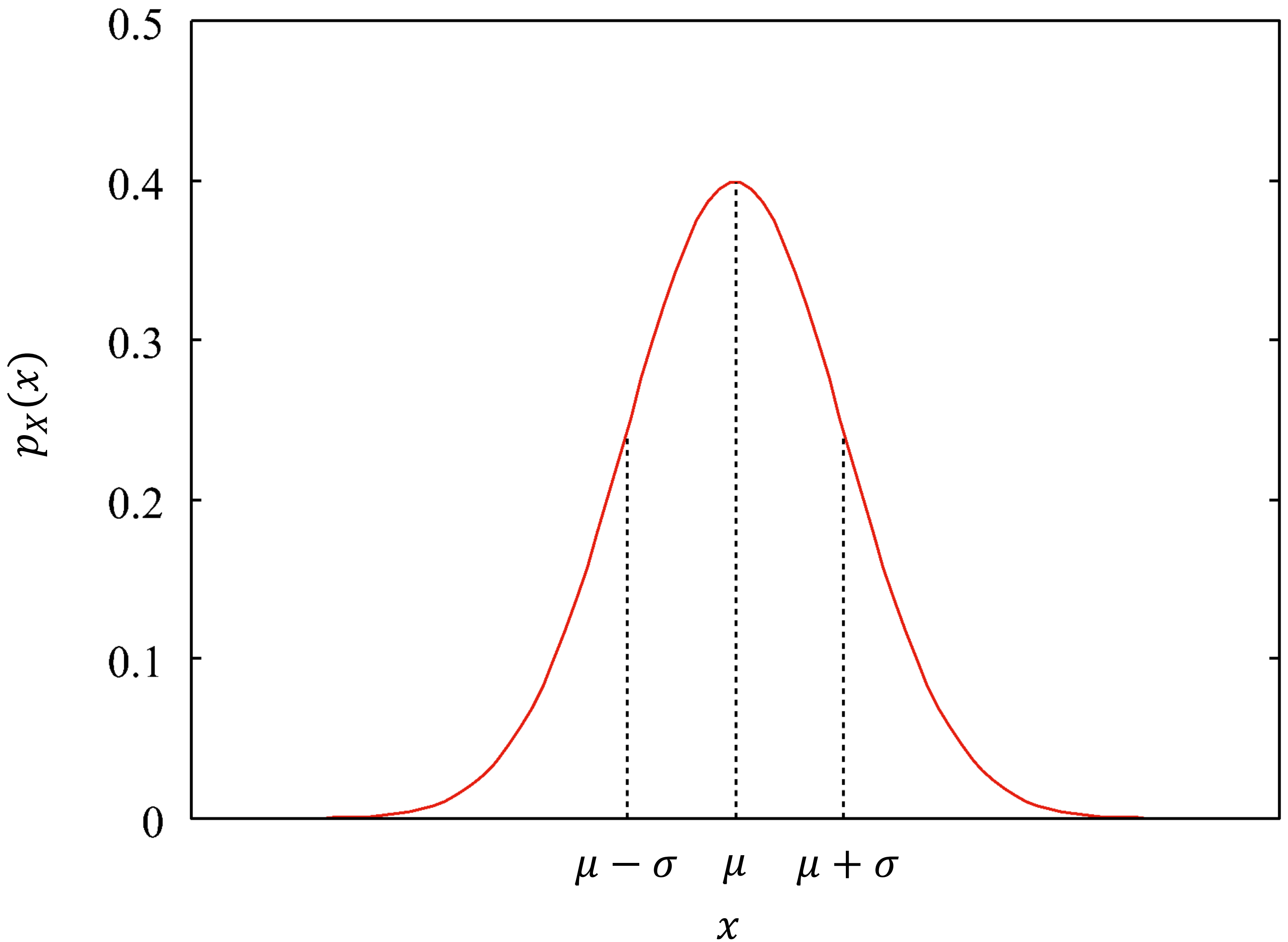
$$\mathbb{V}[X] = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sigma^2 \left[-u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sigma^2$$

最後の等号で、確率密度関数の正規化条件を用いた。

In the last equality, we have used the normalization of the probability density function.

ガウス分布の性質(Properties of the Gaussian distribution)



平均の計算 (Computation of mean)

確率密度関数が以下を満たす一様確率変数Xの平均を計算せよ。

Compute the mean of a uniform random variable X of which the probability density function satisfies

$$p_X(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1} & \text{for } x \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

解答(Answer)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

演習(Exercise)

指数確率変数Xの平均を計算せよ。(Compute the mean of an exponential random variable X.)

$$p_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ラプラス確率変数Xの平均を計算せよ。(Compute the mean of a Laplace random variable X.)

$$p_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \text{ for } x \in (-\infty, \infty)$$