通信工学概論

Introduction to Communication Engineering

第8回講義資料

Lecture notes 8

通信路容量

Channel Capacity

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授　竹内啓悟

Associate Professor　Keigo Takeuchi

加法的白色ガウス雑音通信路 (Additive white Gaussian noise channel)

第1回講義資料p.11でまとめた通信システムに、第6回講義資料で議論した白色ガウス雑音の影響を考慮した通信路モデルを考える。

In the communication system summarized in Lecture notes 1, p. 11, consider a channel model that takes into account the influence of white Gaussian noise, discussed in Lecture notes 6.

$$Y_n = x_{\mathrm{b}}\left(\frac{n}{W}\right) = X_n + W_n, \qquad n = 0, \dots, N-1$$

加法的白色ガウス雑音(Additive white Gaussian noise)

$\{W_n\}$は独立で、各W_nは平均0分散σ^2のガウス分布に従う。

$\{W_n\}$ are independent and each W_n follows the Gaussian distribution with zero mean and variance σ^2.

送信信号(Transmitted signals)

$\{X_n\}$は雑音と独立で、以下の平均電力制約を満たす。

$\{X_n\}$ are independent of the noise and satisfy the following average power constraint.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}[|X_n|^2] \le P$$

独立なガウス確率変数の和 (Sum of independent Gaussian random variables)

定理8.1 (Theorem 8.1)

独立なガウス確率変数$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$と$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$に対して、

For independent Gaussian random variables $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ and $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$,

$$Y = X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

証明(Proof)

ガウス確率変数の和がガウス分布に従うことの証明は省略する。よって、Yの平均と分散がそれぞれ$\mu_1 + \mu_2$と$\sigma_1^2 + \sigma_2^2$であることを示せばよい。

We omit proving that the sum of Gaussian random variables is also Gaussian. Thus, it is sufficient to prove that the mean and variance of Y is $\mu_1 + \mu_2$ and $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$, respectively.

期待値の線形性を使うと、(Using the linearity of expectation yields)

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = \mu_1 + \mu_2$$

分散については、次ページの補題で証明する。

See a lemma in the next page for the variance.

■

独立な確率変数の和の分散 (Variance of the sum of independent random variables)

補題8.1 独立な確率変数X_1とX_2に対して、

Lemma 8.1 For independent random variables X_1 and X_2,

$$\mathbb{V}[X_1 + X_2] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2]$$

証明(Proof) $\mu_1 = \mathbb{E}[X_1]$と$\mu_2 = \mathbb{E}[X_2]$とおく。(Let $\mu_1 = \mathbb{E}[X_1]$ and $\mu_2 = \mathbb{E}[X_2]$.)

$$\mathbb{V}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[\{X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2)\}^2] = \mathbb{E}[\{(X_1 - \mu_1) + (X_2 - \mu_2)\}^2]$$

$$= \mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)^2] + 2\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] + \mathbb{E}[(X_2 - \mu_2)^2]$$

$$= \mathbb{V}[X_1] + 2\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] + \mathbb{V}[X_2]$$

2番目の等号は、期待値の線形性から従う。

The second equality follows from the linearity of expectation.

$f(x) = x - \mu_1$と$g(x) = x - \mu_2$とおき、X_1とX_2の独立性を使うと、

Let $f(x) = x - \mu_1$ and $g(x) = x - \mu_2$. Using the independence between X_1 and X_2 yields

$$\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = \mathbb{E}[f(X_1)g(X_2)] = \mathbb{E}[f(X_1)]\mathbb{E}[g(X_2)]$$

$$= (\mathbb{E}[X_1] - \mu_1)(\mathbb{E}[X_2] - \mu_2) = (\mu_1 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_2) = 0 \qquad \blacksquare$$

定理8.1の別証(Another proof of Theorem 8.1)

Yの確率密度関数の定義を使う。(We use the definition of the probability density function of Y.)

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Y|X_1}(y|x_1) p_{X_1}(x_1) dx_1$$

まず、X_1が与えられたときのYの条件付き分布関数を考える。

We first consider the conditional distribution function of Y given X_1.

$$\mathbb{P}(Y \le y \mid X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \le y \mid X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_2 \le y - x_1 \mid X_1 = x_1)$$

$$= \mathbb{P}(X_2 \le y - x_1) = \int_{-\infty}^{y-x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(u-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} du = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(x_2-\mu_2-x_1)^2}{2\sigma_2^2}} dx_2$$

3番目の等号でX_1とX_2の独立性、最後の等号で変数変換$x_2 = u + x_1$を用いた。

We have used the independence between X_1 and X_2 in the third equality, and the change of variables $x_2 = u + x_1$ in the last equality.

両辺をyに関して微分すると、(Differentiating both sides with respect to y, we have)

$$p_{Y|X_1}(y|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(y-\mu_2-x_1)^2}{2\sigma_2^2}}$$

定理8.1の別証(Another proof of Theorem 8.1)

$$p_{Y|X_1}(y|x_1)p_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{(y-\mu_2-x_1)^2}{2\sigma_2^2}-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

積分を実行するために、指数部をx_1に関して平方完成する。

To compute the integration, we complete a square in the exponent with respect to x_1.

指数部

Exponent

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)x_1^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2^2}+\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}\right)x_1 - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{\mu_1^2}{2\sigma_1^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left\{x_1 - \frac{\sigma_1^2(y-\mu_2)+\sigma_2^2\mu_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}^2 - \frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$$

確率密度関数の正規化条件を使ってx_1に関する積分を行うと、

Computing the integration with respect to x_1 via the normalization of the probability density function, we have

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\sqrt{\frac{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\,e^{-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

■

誤り確率(Error probabilty)

$N=1$として、BPSK信号$X_0=\pm\sqrt{P}$の伝送を考える。$Y_0>0$のときに$X_0=\sqrt{P}$が、$Y_0\leq 0$のときに$X_0=-\sqrt{P}$が伝送されたものと判定することにする。この復調方式のビット誤り率を計算せよ。

For $N=1$, consider transmission of the BPSK signal $X_0=\pm\sqrt{P}$ and a method in which $X_0=\sqrt{P}$ is detected if $Y_0>0$. Otherwise, $X_0=-\sqrt{P}$ is detected. Compute the bit error rate (BER) of this demodulation method.

$X_0=-\sqrt{P}$が伝送されたときに、誤って判定する確率は以下で与えられる。

When $X_0=-\sqrt{P}$ has been sent, the error probability of detection is given by

$$\mathbb{P}\left(Y_0>0 \middle| X_0=-\sqrt{P}\right)=\int_0^{\infty} p_{Y_0|X_0}\left(y\middle|-\sqrt{P}\right)dy = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\left(y+\sqrt{P}\right)^2}{2\sigma^2}}dy$$

最後は、定理8.1の別証を参照(See another proof of Theorem 8.1 for the last.)

$u=(y+\sqrt{P})/\sigma$と変数変換すると、(Under the change of variables $u=(y+\sqrt{P})/\sigma$,)

$$\mathbb{P}\left(Y_0>0 \middle| X_0=-\sqrt{P}\right)=\int_{\sqrt{P}/\sigma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du \equiv Q\left(\frac{\sqrt{P}}{\sigma}\right)$$

誤り確率(Error probabilty)

同様に、$X_0=\sqrt{P}$が伝送されたときに、誤る確率は以下で与えられる。

Similarly, when $X_0=\sqrt{P}$ has been sent, the error probability is given by

$$\mathbb{P}\left(Y_0 \le 0 \middle| X_0=\sqrt{P}\right)=\int_{-\infty}^{-\sqrt{P}/\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = \int_{\sqrt{P}/\sigma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = Q\left(\frac{\sqrt{P}}{\sigma}\right)$$

二番目の等号は、ガウス分布の確率密度関数の対称性から従う。

The second equality follows from the symmetry of the Gaussian probability density function.

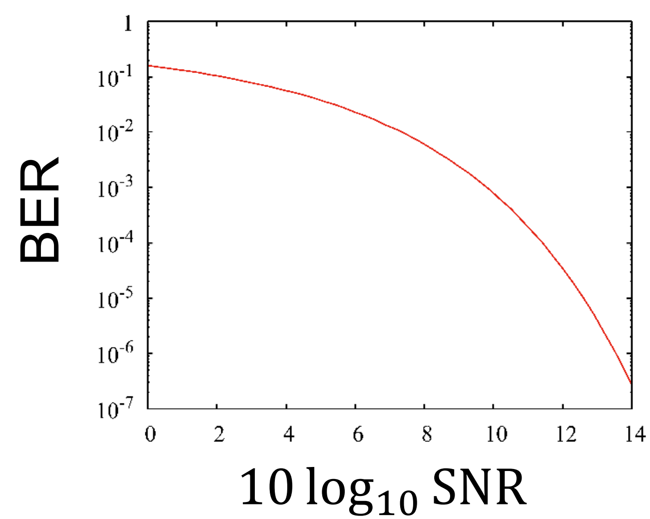
よって、ビット誤り率BERは以下となる。(Thus, the bit error rate BER is given by)

$$\mathrm{BER}=\mathbb{P}\left(X_0=-\sqrt{P}\right)\mathbb{P}\left(Y_0>0\middle|X_0=-\sqrt{P}\right)+\mathbb{P}\left(X_0=\sqrt{P}\right)\mathbb{P}\left(Y_0\le 0\middle|X_0=\sqrt{P}\right)$$

$$=Q\left(\sqrt{\mathrm{SNR}}\right),\qquad \mathrm{SNR}=P/\sigma^2$$

有限の信号対雑音比SNRでは、BERは0にならない。

For finite signal-to-noise ratio SNR, BER is strictly positive.



繰り返し符号(Repetition coding)

BPSK信号X_0をN回繰り返し伝送する。

Consider N repetitions of transmission of the BPSK signal X_0.

$$X_n = X_0 \ \text{for}\ n = 0, \dots, N-1$$

復調(Demodulation)

復調問題を符号化なしの場合に帰着させる。

Reduce the demodulation problem to the uncoded case.

$$Z = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n = NX_0 + W', \qquad W' = \sum_{n=0}^{N-1} W_n$$

信号NX_0は$\pm N\sqrt{P}$を取る。W'は定理8.1から$W' \sim \mathcal{N}(0, N\sigma^2)$である。

The signal NX_0 takes $\pm N\sqrt{P}$. $W' \sim \mathcal{N}(0, N\sigma^2)$ holds from Theorem 8.1.

ビット誤り率

Bit error rate

$$\mathrm{BER} = Q\left(\sqrt{\frac{N^2 P}{N\sigma^2}}\right) = Q(\sqrt{N\mathrm{SNR}})$$

符号長無限の極限$N \to \infty$で、ビット誤り率はゼロに収束する。

The bit error rate converges to zero as the code length N tends to infinity.

伝送レート(Transmission rate)

伝送レート(Transmission rate)

$$R = \frac{\text{伝送された情報ビット数 (Transmitted bits of information)}}{N} \text{ [bits/s/Hz]}$$

符号化なしの場合(Uncoded case)

1時点当たり1ビットの情報を伝送する。

One bit of information per channel use is sent.

$R = 1$ bits/s/Hz

繰り返し符号(Repetition coding)

1時点当たり$1/N$ビットの誤りなしの情報伝送ができる。

$1/N$ bits of information per channel use can be sent without errors.

$$R = \frac{1}{N} \rightarrow 0$$

有限のレート$R > 0$で、誤りなしの伝送は実現可能か?

Is it possible to realize error-free transmission for a finite rate $R > 0$?

条件付きエントロピー(Conditional entropy)

Y が与えられたときの離散確率変数 X の条件付きエントロピーを以下で定義する。

The conditional entropy of a discrete random variable X given Y is given by

$$H(X|Y) = \mathbb{E}[F(Y)],$$

$$F(y) = H(X|Y = y) = -\sum_{x} \mathbb{P}(X = x|Y = y) \log_2 \mathbb{P}(X = x|Y = y)$$

意味(Meaning)

条件付きエントロピーは、Yを観測したときのXに関する不確かさを表す。

The conditional entropy means the amount of uncertainty on X when Y has been observed.

相互情報量(Mutual information)

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

Yを観測したときにXに関して得られる情報量

The newly obtained amount of information on X when Y has been observed.

連続の場合 (The continuous case)

連続確率変数Xに対して、(For a continuous random variable X,)

微分エントロピー(Differential entropy)

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \log_2 p_X(x)\, dx\,, \qquad 0 \log_2 0 = 0$$

微分エントロピーにエントロピーのような操作的な意味はない。

The differential entropy does not have operational meaning such as entropy.

条件付き微分エントロピー(Conditional differential entropy)

$$h(X|Y) = \mathbb{E}[f(Y)],$$

$$f(y) = h(X|Y = y) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_{X|Y}(x|y) \log_2 p_{X|Y}(x|y)\, dx$$

相互情報量(Mutual information)

$$I(X;Y) = h(X) - h(X|Y)$$

離散の場合と同じ意味(The same meaning as the discrete case)

微分エントロピーの計算(Computation of differential entropy)

例8.1 (Example 8.1)

連続確率変数Xは、区間$[0,a]$上の一様分布に従うとする。
Xの微分エントロピーを計算せよ。

A continuous random variable X is uniformly distributed on the interval $[0,a]$.
Compute the differential entropy of X.

定義から、Xの確率密度関数は以下で与えられる。

By definition, the probability density function of X is given by

$$p_X(x) = \begin{cases} a^{-1} & \text{for } x \in [0,a] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

よって、(Thus,)

$$h(X) = -\int_0^a \frac{1}{a}\log_2\frac{1}{a}dx = \log_2 a$$

$a < 1$のとき、微分エントロピー$h(X)$は負になる。

For $a < 1$, the differential entropy $h(X)$ is negative.

通信路符号化定理(Channel coding theorem)

符号長無限大の極限$N \to \infty$で、誤りなしの伝送を実現する符号化方法が存在するための必要十分条件は、伝送レートが$R < C$を満たすことである。

There exists some coding method such that error-free transmission is possible as the code length N tends to infinity if and only if the transmission rate satisfies $R < C$.

通信路容量(Channel capacity)

$$C = I(X_0; Y_0)$$

信号系列$\{X_n\}_{n=0}^{N-1}$は独立で、各信号は平均0分散Pのガウス分布に従う。

The signal sequence $\{X_n\}_{n=0}^{N-1}$ are independent. Each signal follows the Gaussian distribution with zero mean and variance P.

証明は情報理論の講義を参照(Learn Information Theory for the proof.)

注意(Remark)

デジタル変調を行っている限り、通信路容量は達成できない。

Digital modulation can never achieve the channel capacity.

通信路容量の計算(Computation of the channel capacity)

補題8.2(Lemma 8.2)

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$に対して、(For $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$,)

$$h(X) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2)$$

証明(Proof)

第６回講義資料から、(From Lecture nodes 6,)

$$-\log_2 p_X(x) = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\log_2 e + \frac{1}{2}\log_2(2\pi\sigma^2)$$

微分エントロピーの定義を使うと、(Using the definition of differential entropy yields)

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\log_2 p_X(x)\,dx = -\mathbb{E}[\log_2 p_X(X)]$$

$$= \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}{2\sigma^2}\log_2 e + \frac{1}{2}\log_2(2\pi\sigma^2) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2)$$

$\because\ \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sigma^2$ ■

通信路容量の計算(Computation of the channel capacity)

補題8.3(Lemma 8.3)

連続確率変数XとYに対して、(For continuous random variables X and Y,)

$$I(X;Y)=h(X)-h(X|Y)=h(Y)-h(Y|X)$$

証明(Proof)

同時確率密度関数の定義から、(From the definition of joint probability density function,)

$$\frac{p_{X,Y}(X,Y)}{p_X(X)p_Y(Y)}=\frac{p_{X|Y}(X|Y)}{p_X(X)}=\frac{p_{Y|X}(Y|X)}{p_Y(Y)}$$

$$\log_2\frac{p_{X,Y}(X,Y)}{p_X(X)p_Y(Y)}=-\log_2 p_X(X)+\log_2 p_{X|Y}(X|Y)=-\log_2 p_Y(Y)+\log_2 p_{Y|X}(Y|X)$$

中辺と右辺の期待値を取ると、(Taking the expectation of the middle and right-hand sides yields)

$$h(X)-h(X|Y)=h(Y)-h(Y|X) \qquad \blacksquare$$

通信路容量の計算(Computation of the channel capacity)

通信路容量

Channel capacity

$$C = \frac{1}{2}\log_2(1 + \mathrm{SNR})\ \ [\mathrm{bits/s/Hz}], \qquad \mathrm{SNR} = \frac{P}{\sigma^2}$$

証明

Proof

定理8.1の別証から、(From another proof of Theorem 8.1,)

$$p_{Y_0|X_0}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}$$

よって、補題8.2を使って、$h(Y_0|X_0) = 2^{-1}\log_2(2\pi e\sigma^2)$を得る。

Thus, we use Lemma 8.2 to obtain $h(Y_0|X_0) = 2^{-1}\log_2(2\pi e\sigma^2)$.

さらに、定理8.1から、$Y_0 \sim \mathcal{N}(0, P + \sigma^2)$である。したがって、

Furthermore, Theorem 8.1 implies $Y_0 \sim \mathcal{N}(0, P + \sigma^2)$. Therefore,

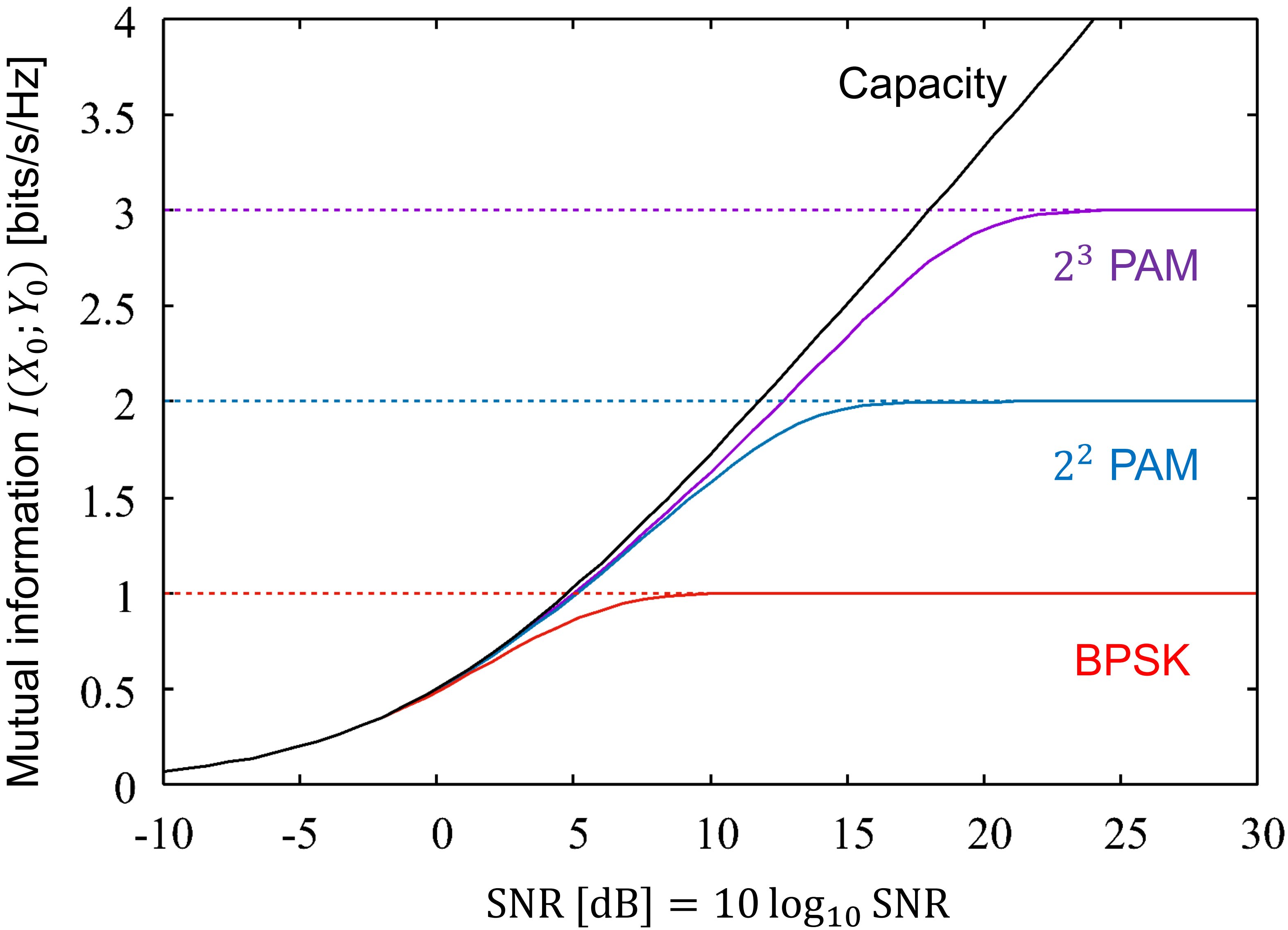
$$h(Y_0) = \frac{1}{2}\log_2\{2\pi e(P + \sigma^2)\}$$

補題8.3から、$C = I(X_0; Y_0) = h(Y_0) - h(Y_0|X_0)$を評価すると、

From Lemma 8.3, we evaluate $C = I(X_0; Y_0) = h(Y_0) - h(Y_0|X_0)$,

$$C = \frac{1}{2}\log_2\{2\pi e(P + \sigma^2)\} - \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2) = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma^2}\right) \qquad \blacksquare$$

デジタル変調の比較(Comparison between digital modulation)



演習(Exercise)

連続確率変数Xの確率密度関数は、以下で与えられるものとする。
Xの微分エントロピーを計算せよ。

The probability density function of a continuous random variable X is given as follows.
Compute the differential entropy of X.

$$p_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の加法的ラプラス雑音通信路を通じて、BPSK信号$X = \pm\sqrt{P}$を伝送する。$Y > 0$のときに$X = \sqrt{P}$が、$Y \leq 0$のときに$X = -\sqrt{P}$が伝送されたものと判定する。この復調方式のビット誤り率を計算せよ。

Consider transmission of the BPSK signal $X = \pm\sqrt{P}$ over the following additive Laplace noise channel. $X = \sqrt{P}$ is detected if $Y > 0$. Otherwise, $X = -\sqrt{P}$ is detected. Compute the bit error rate of this demodulation method.

$$Y = X + L$$

ラプラス雑音Lの確率密度関数(Probability density function of the Laplace noise L)

$$p_L(l) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|l|}, \qquad l \in (-\infty, \infty), \qquad \lambda > 0$$