通信理論に特化した深層学習
第2回ゼミ資料
並列干渉除去法

豊橋技術科学大学
電気・電子情報工学系
准教授　竹内啓悟

Single-input multiple-output (SIMO)通信路

受信次元MのSIMO通信路

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_M)$$

BPSK送信信号

$$\mathbb{P}(x = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

通信路ベクトル

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^M$は受信側で既知のベクトル

AWGNベクトル

$\boldsymbol{w}$は平均$\boldsymbol{0}$共分散行列$\sigma^2 \boldsymbol{I}_M$の$M$次元ガウス確率ベクトル

$$\boldsymbol{z} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \iff p(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{(2\pi \det \Sigma)^{M/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})}.$$

十分統計量(Sufficient statistic)

統計量$T(y)$が与えられたときのyの分布がxに依存しないとき、
統計量$T(y)$はxに対する十分統計量と呼ばれる。

$$p(y\,|T(y),x) = p(y\,|T(y)).$$

推定量とは、xの統計量の中で推定用に定義された統計量と思えばよい。

解釈

十分統計量$T(y)$が与えられると、yで不確かな部分はxに依存しないため、
$T(y)$はxに関する十分な情報を含んでいる。

定理2.1

統計量$T(y)$がxに対する十分統計量であるための必要十分条件は、
条件付き確率分布が次のように因子分解できることである。

$$p(y|x) = f(y)g(T(y),x).$$

証明では、yが離散確率変数であることを仮定する。

証明ー必要性

yの分布が離散の場合のみに適用可能な証明を与える。

必要性の証明

$T(y)$は十分統計量であると仮定する。

$T(y)$はyの決定論的な関数なので、

$$\mathbb{P}(y = y_0, T(y) = t|x) = \begin{cases} \mathbb{P}(y = y_0|x) & \text{for } t = T(y_0), \\ 0 & \text{for } t \neq T(y_0). \end{cases}$$

条件付き確率の定義から、

$$\mathbb{P}(y = y_0|x) = \mathbb{P}(y = y_0, T(y) = T(y_0)|x)$$
$$= \mathbb{P}(y = y_0 \,|T(y) = T(y_0), x)\mathbb{P}(T(y) = T(y_0)|x).$$

$T(y)$は十分統計量なので、$\mathbb{P}(y = y_0|T(y) = T(y_0), x)$は$x$に依存しない。

それゆえ、

$$\mathbb{P}(y = y_0|x) = f(y = y_0)g(T(y) = t, x).$$

■

証明ー十分性

十分性の証明

$\mathbb{P}(y|x) = f(y)g(T(y), x)$と因子分解できると仮定する。

確率分布$\mathbb{P}(T(y) = t|x)$の定義から、

$$\mathbb{P}(T(y) = t|x) = \sum_{y_0:T(y_0)=t} \mathbb{P}(y = y_0|x) = g(T(y) = t, x) \sum_{y_0:T(y_0)=t} f(y = y_0).$$

それゆえ、$t = T(y_0)$に対して

$$\mathbb{P}(y = y_0\,|T(y) = t, x) = \frac{\mathbb{P}(y = y_0, T(y) = t|x)}{\mathbb{P}(T(y) = t|x)} = \frac{\mathbb{P}(y = y_0|x)}{\mathbb{P}(T(y) = t|x)}$$

$$= \frac{f(y = y_0)g(T(y) = t, x)}{g(T(y) = t, x)\sum_{y_0:T(y_0)=t} f(y = y_0)} = \frac{f(y = y_0)}{\sum_{y_0:T(y_0)=t} f(y = y_0)}.$$

最後の表現はxに依存しないため、$\mathbb{P}(y = y_0\,|T(y) = t, x)$も$x$に依存しない。

したがって、$T(y)$は母数xに対する十分統計量である。 ■

整合フィルタ(Matched filter, MF)の最適性

命題2.1

整合フィルタ出力$z = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{a}\|^2$は、$x$の十分統計量である。

証明:

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{a},x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{M/2}} e^{-\frac{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}x\|^2}{2\sigma^2}}.$$

条件付き確率密度関数$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{a},x)$が、定理2.1の因子分解可能なことを示す。

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}x\|^2 = (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}x)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}x) = \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2x\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{a}\|^2x^2$$

上記の指数部の計算結果を代入すると、

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{a},x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{M/2}} e^{-\frac{\|\boldsymbol{y}\|^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{\sigma^2}x-\frac{\|\boldsymbol{a}\|^2}{2\sigma^2}x^2}$$

定理2.1から、整合フィルタ出力$z = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{a}\|^2$は$x$の十分統計量である。 ■

整合フィルタに基づく等価通信路

命題2.1から、整合フィルタを施しても、性能劣化は発生しない。

$$z = \frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} = x + \tilde{w}, \qquad \tilde{w} = \frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}.$$

等価ノイズの性質

$\boldsymbol{w}$のガウス性から、$\tilde{w}$のガウス性が従う。

$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{w}$の独立性と$\boldsymbol{w}$の定義とを使って、

$$\mathbb{E}[\tilde{w}|\boldsymbol{a}] = \frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbb{E}[\boldsymbol{w}]}{\|\boldsymbol{a}\|^2} = 0, \qquad \mathbb{E}[\tilde{w}^2|\boldsymbol{a}] = \frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathbb{E}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^4} = \frac{\sigma^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2}.$$

SIMO通信路は、AWGN通信路に帰着した。

事後平均推定量

$$\hat{x} = \mathbb{E}[x|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}] = \tanh\left(\frac{z}{\sigma^2/\|\boldsymbol{a}\|^2}\right) = \tanh\left(\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{\sigma^2}\right).$$

Multiple-input multiple-output (MIMO)通信路

送信次元N受信次元MのMIMO

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_M)$$

BPSK送信ベクトル

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^{\mathrm{T}} \in \{1, -1\}^N$は独立なBPSK要素からなる。

通信路行列

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_N) \in \mathbb{R}^{M \times N}$は受信側で既知の行列

AWGNベクトル

$\boldsymbol{w}$は平均$\boldsymbol{0}$共分散行列$\sigma^2 \boldsymbol{I}_M$の$M$次元ガウス確率ベクトル

準最適な推定方法

x_nを推定する際、干渉信号を空間相関のないAWGNで近似する。

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_n x_n + \underbrace{\sum_{n' \neq n} \boldsymbol{a}_{n'} x_{n'} + \boldsymbol{w}}_{= \boldsymbol{I}_n}$$

MIMO通信路を近似的にSIMO通信路に帰着させた。

干渉信号の統計的性質

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{I}_n | \boldsymbol{A}] = \sum_{n' \neq n} \boldsymbol{a}_{n'} \mathbb{E}[x_{n'}] = \boldsymbol{0},$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{I}_n \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{A}] \approx \frac{\mathbb{E}[\|\boldsymbol{I}_n\|^2 | \boldsymbol{A}]}{M} \boldsymbol{I}_M, \qquad \frac{\mathbb{E}[\|\boldsymbol{I}_n\|^2 | \boldsymbol{A}]}{M} = \sigma^2 + \frac{1}{M} \sum_{n' \neq n} \|\boldsymbol{a}_{n'}\|^2 \mathbb{E}[x_{n'}^2].$$

整合フィルタに基づく軟判定

$$\hat{x}_n = \tanh\left(\frac{\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}}{v_n}\right), \qquad v_n = \sigma^2 + \frac{1}{M} \sum_{n' \neq n} \|\boldsymbol{a}_{n'}\|^2.$$

並列干渉除去法（Parallel interference cancellation, PIC）

軟判定結果を使って、反復処理によって干渉除去を行う。

反復tにおけるx_nの軟判定結果を$x_{\mathrm{B},n}^t$とする。ただし、$x_{\mathrm{B},n}^0 = 0$。

$$\boldsymbol{y} - \sum_{n' \neq n} a_{n'} x_{\mathrm{B},n'}^t = \boldsymbol{a}_n x_n + \sum_{n' \neq n} \boldsymbol{a}_{n'} \left(x_{n'} - x_{\mathrm{B},n'}^t \right) + \boldsymbol{w}$$

整合フィルタに基づく軟判定

$$x_{\mathrm{B},n}^{t+1} = \tanh\left(\frac{x_{\mathrm{A},n}^t}{v_{\mathrm{A},n}^t} \right), \qquad x_{\mathrm{A},n}^t = \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{y} - \sum_{n' \neq n} \boldsymbol{a}_{n'} x_{\mathrm{B},n'}^t \right),$$

$$v_{\mathrm{A},n}^t = \sigma^2 + \frac{1}{M} \sum_{n' \neq n} \|\boldsymbol{a}_{n'}\|^2 \, \mathbb{E}\left[\left(x_{n'} - x_{\mathrm{B},n'}^t \right)^2 \middle| \boldsymbol{A} \right].$$

平均二乗誤差を計算しやすい以下の事後分散で置き換える。

$$\mathbb{E}\left[\left(x_{n'} - x_{\mathrm{B},n'}^t \right)^2 \middle| \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A} \right] = \mathbb{E}\left[x_{n'}^2 \middle| \boldsymbol{y}, \boldsymbol{A} \right] - \left(x_{\mathrm{B},n}^t \right)^2 = 1 - \left(x_{\mathrm{B},n}^t \right)^2 \equiv v_{\mathrm{B},n}^t.$$

並列干渉除去法の簡略化

大システム極限

負荷$\alpha = N/M$を固定して、MとNを無限大にした極限

大システム極限で$\|a_n\|^2 \to 1$を仮定して、PICを簡略化する。

モジュールA

$$x_{\mathrm{A},n}^t = \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}x_{\mathrm{B}}^t + \boldsymbol{a}_n x_{\mathrm{B},n}^t\right) \to x_{\mathrm{B},n}^t + \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^t).$$

ベクトル形式で書き直すと、 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}}^t = \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^t + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^t).$

$$v_{\mathrm{A},n}^t = \sigma^2 + \frac{1}{M}\sum_{n' \neq n} \|\boldsymbol{a}_{n'}\|^2 v_{\mathrm{B},n'}^t \approx \sigma^2 + \alpha v_{\mathrm{B}}^t \equiv v_{\mathrm{A}}^t, \qquad v_{\mathrm{B}}^t = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_{\mathrm{B},n}^t.$$

モジュールB

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^{t+1} = \tanh\left(\frac{\boldsymbol{x}_{\mathrm{A}}^t}{v_{\mathrm{A}}^t}\right),$$

関数を要素ごとに適用

$$v_{\mathrm{B}}^{t+1} \approx 1 - \frac{1}{N}\left\|\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^{t+1}\right\|^2.$$

並列干渉除去法の更新手順