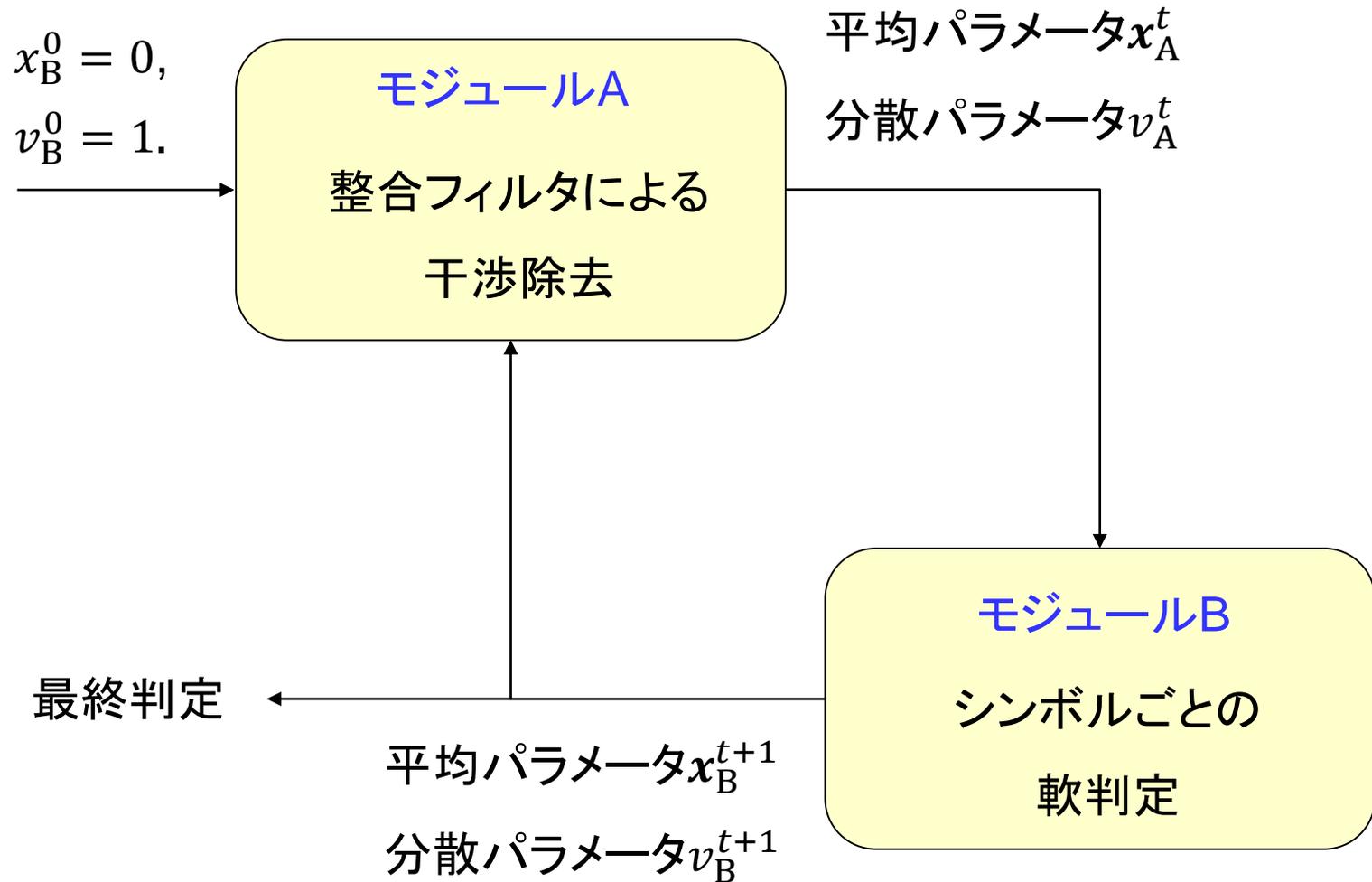


通信理論に特化した深層学習
第3回ゼミ資料
近似的メッセージ伝播法 (AMP)

豊橋技術科学大学
電気・電子情報工学系
准教授 竹内啓悟

並列干渉除去法の更新手順



並列干渉除去法

モジュールA

$$\mathbf{x}_A^t = \mathbf{x}_B^t + \mathbf{A}^T \mathbf{z}_t,$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_B^t,$$

$$v_A^t = \sigma^2 + \alpha v_B^t.$$

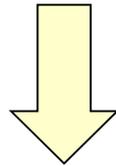
モジュールB

$$\mathbf{x}_B^{t+1} = \tanh\left(\frac{\mathbf{x}_A^t}{v_A^t}\right), \quad \text{関数を要素ごとに適用}$$

$$v_B^{t+1} \approx 1 - \frac{1}{N} \|\mathbf{x}_B^{t+1}\|^2.$$

並列干渉除去法の仮定の検証

モジュールBから送られるメッセージ x_B^t と v_B^t が、通信路行列 A やノイズ w と独立で、要素ごとにも独立な確率変数として、PICの導出を行った。



実際には、この仮定は成立せず、PICの収束の不安定につながる。

近似的メッセージ伝播法 (Approximate message-passing, AMP)

大システム極限

負荷 $\alpha = N/M$ を固定して、 M と N を無限大にした極限

大システム極限で上記の仮定が成立するように、PICに補正を加える。

近似的メッセージ伝播法

モジュールA

$$\mathbf{x}_A^t = \mathbf{x}_B^t + \mathbf{A}^T \mathbf{z}_t,$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_B^t + \alpha \xi_{t-1} \mathbf{z}_{t-1}, \quad \xi_t = \frac{1}{v_A^t} \left\langle \tanh' \left(\frac{\mathbf{x}_A^t}{v_A^t} \right) \right\rangle,$$

$$v_A^t = \sigma^2 + \alpha v_B^t.$$

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \quad \text{for } \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)^T.$$

モジュールB

$$\mathbf{x}_B^{t+1} = \tanh \left(\frac{\mathbf{x}_A^t}{v_A^t} \right), \quad \text{関数を要素ごとに適用}$$

$$v_B^{t+1} \approx 1 - \frac{1}{N} \|\mathbf{x}_B^{t+1}\|^2.$$

オンサーガ(Onsager)項

i.i.d.レイリーフェーディング

通信路行列 A が独立同一分布 (independent and identically distributed, i.i.d.) した要素を持ち、各要素は $\mathcal{N}(0, M^{-1})$ に従う。

オンサーガ項 $\alpha\xi_{t-1}\mathbf{z}_{t-1}$

i.i.d.レイリーフェーディングの場合に、大システム極限において、並列干渉除去法の導出で使ったメッセージの独立性に関する仮定を成立させるための補正項

L. Onsager (1903—1976)

オンサーガ相反関係(不可逆過程の熱力学の基礎)を発見した貢献により、1968年にノーベル化学賞を受賞

名前の由来

項の名前は、液体論に関わるオンサーガの1936年の論文で提案された方法論に由来する。

物理学者は、彼の方法論に従って導出される反跳場(reaction field)を**オンサーガ反跳場**と呼ぶ。

オンサーガのキャビティ(Cavity)アプローチ

キャビティ場(Cavity field)

n 番目の送信アンテナを取り除いた $M \times (N - 1)$ キャビティMIMOにおいて、
干渉除去後に残っている干渉雑音

AWGNとみなせることを仮定する。

反跳場(Reaction field)

キャビティMIMOに n 番目のアンテナを追加したときに、
追加したアンテナがキャビティ場に与える無視できない影響

$[A^T(\alpha\xi_{t-1}\mathbf{z}_{t-1})]_n$ のことだと思えばよい。

真の残留干渉 $[\mathbf{x}_B^t + A^T(\mathbf{y} - A\mathbf{x}_B^t)]_n - x_n$ に反跳場による影響の補正
を加えた $x_{A,n}^t - x_n$ は、 x_n と独立なキャビティ場とみなせるはず。

オンサーガ項の別表現

tanh x に関する恒等式

$$\tanh' x = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \tanh^2 x.$$

恒等式を代入

$$\begin{aligned}\xi_t &= \frac{1}{v_A^t} \left\langle \tanh' \left(\frac{x_A^t}{v_A^t} \right) \right\rangle = \frac{1}{v_A^t} \left\langle 1 - \tanh^2 \left(\frac{x_A^t}{v_A^t} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{v_A^t} \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_{B,n}^{t+1})^2 \right) = \frac{v_B^{t+1}}{v_A^t}.\end{aligned}$$

実は、推定量として事後平均推定量を使用する限り、オンサーガ項のこの表現は一般に成立する。

状態発展法

大システム極限において、反復によってAMPの性能がどのように変化するかを追跡するための厳密な理論解析手法

仮定

通信路として、i.i.d.レイリーフェーディングを仮定する。

状態発展方程式

$$\frac{1}{\text{SINR}_t} = \sigma^2 + \alpha \text{MSE}_t, \quad \text{MSE}_0 = 1,$$

$$\text{MSE}_{t+1} = \text{MMSE}(\text{SINR}_t).$$

MMSE(s)は信号対雑音比 (Signal-to-noise ratio, SNR)が s のBPSK入力AWGN通信路に対する最小平均二乗誤差

定理3.1

AMPの反復 t における平均二乗誤差 $N^{-1} \|x - x_B^t\|^2$ は、大システム極限において MSE_t にほとんど確実に収束する。

最小平均二乗誤差 (Minimum mean-square error, MMSE)

SNRが s のAWGN通信路

$$y = x + w, \quad w \sim \mathcal{N}(0, s^{-1}).$$

BPSK

$$\mathbb{P}(x = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

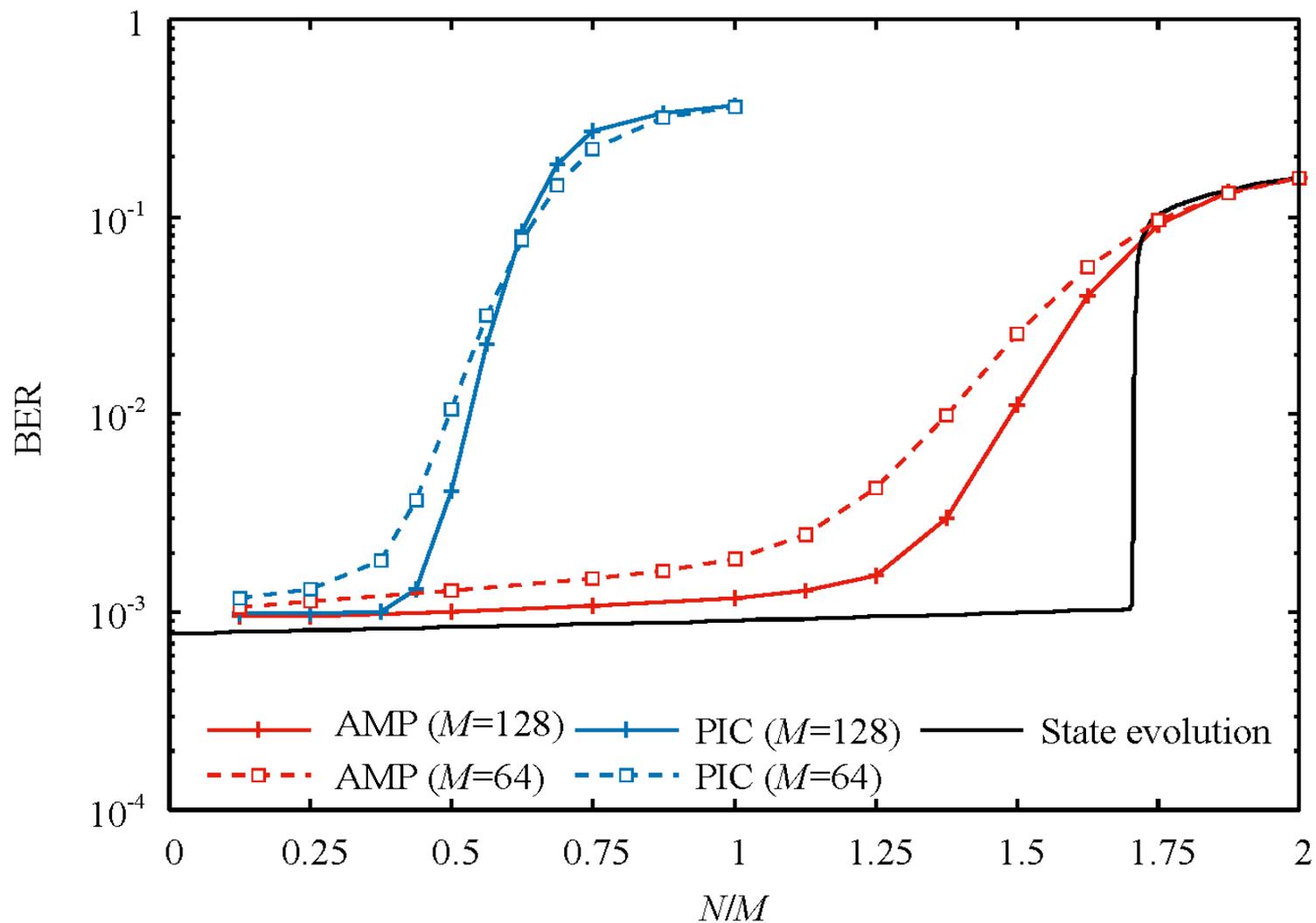
事後平均推定量

$$\hat{x}_{\text{PME}}(y) = \tanh(sy).$$

MMSE

$$\begin{aligned} \text{MMSE}(s) &= \mathbb{E}[\{x - \hat{x}_{\text{PME}}(sy)\}^2] \\ &= 1 - \mathbb{E}_x \left[\int \tanh^2(sy) \frac{1}{\sqrt{2\pi/s}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2/s}} dy \right]. \end{aligned}$$

数値シミュレーション



反復回数50回、 $\text{SNR}1/\sigma^2 = 10 \text{ dB}$