メッセージ伝播法入門
第7回講義資料
空間結合の導入

九州大学

平成30年10月10日～10月12日

豊橋技術科学大学

電気・電子情報工学系

准教授　竹内啓悟

ベイズ最適な性能[1-5,1-6]

$$v = \sigma^2 + \frac{1}{\delta}\mathrm{MMSE}(1/v),$$

$$\mathrm{MMSE}(s) = \mathbb{E}\left[\left\{x_n - \mathbb{E}\left[x_n \middle| x_n + s^{-1/2}\omega_n\right]\right\}^2\right], \qquad \omega_n \sim \mathcal{N}(0,1).$$

vを上記の不動点方程式の解として、ベイズ最適な推定のMSEは、大システム極限で$\mathrm{MMSE}(1/v)$に等しい。

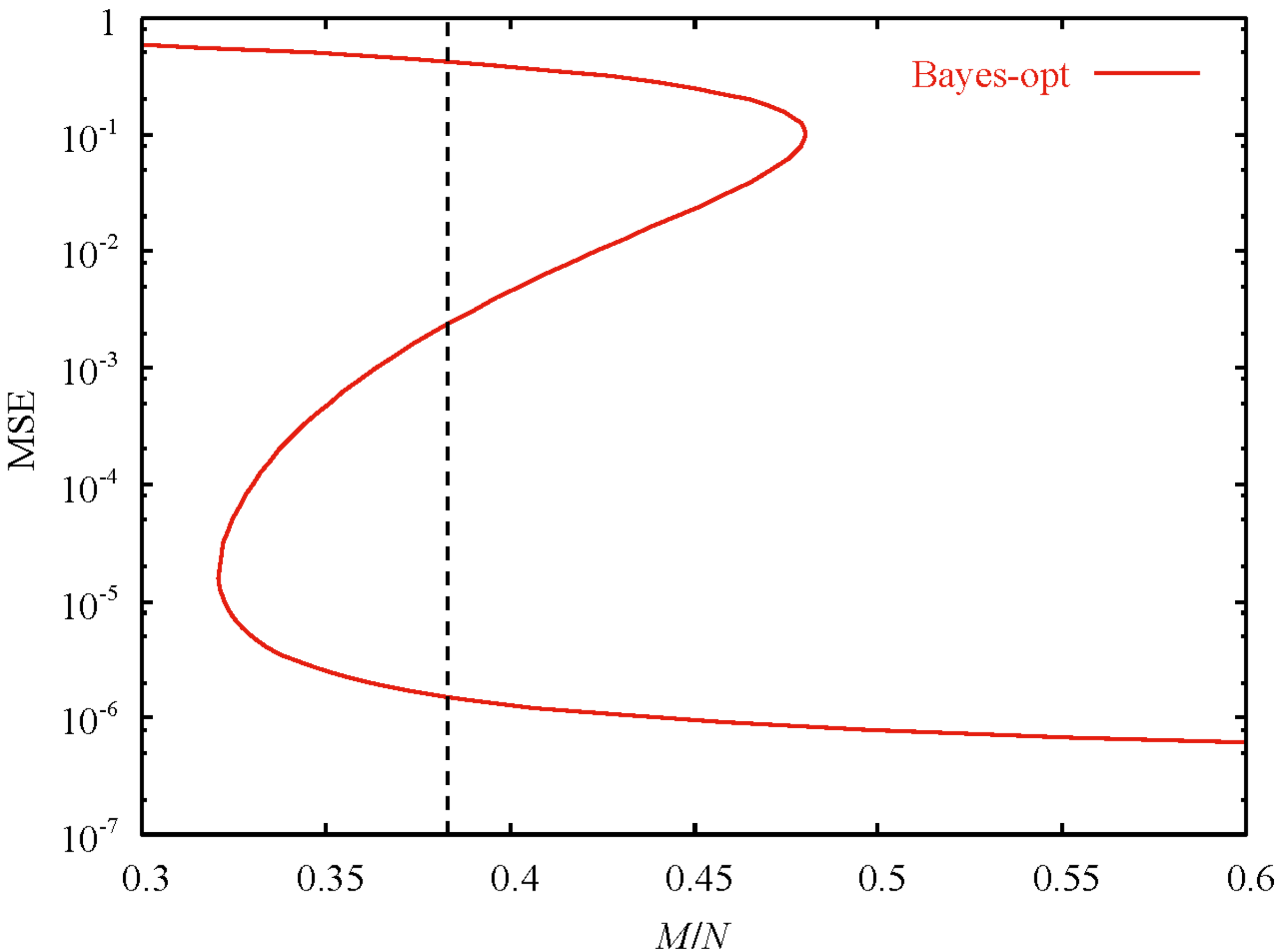
ただし、複数の解が存在する場合は、自由エネルギー$F(1/v)$を最小にする解を選ぶ。

自由エネルギー

$$F(s) = I(s) + \frac{\delta}{2}\{\sigma^2 s - 1 - \ln(\sigma^2 s)\} + \frac{d}{2}\ln\sigma^2.$$

$I(s) = I\left(x_n; x_n + s^{-1/2}\omega_n\right)$, $\quad d$:信号x_nのレニー情報次元

数値的評価



信号密度$\rho = 0.3$のBG事前分布、SNR:$1/\sigma^2 = 60$ dB.

自由エネルギーの性質

$\delta > d$とする。ノイズなしの極限$\sigma^2 \to 0$で、0に収束する不動点方程式の解$v_{\rm opt}$は、$s_{\rm opt} = 1/v_{\rm opt}$として$F(s_{\rm opt})$を最小にする。

意義

ベイズ最適な推定は、ノイズなしの極限で情報理論的な圧縮限界d[1-2]を達成する。

証明

I-M関係式[1-9]

$$\frac{d}{ds} I(s) = \frac{1}{2}\mathrm{MMSE}(s).$$

不動点方程式

$$F'(s) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s} = \sigma^2 + \frac{1}{\delta}\mathrm{MMSE}(s).$$

エネルギー差の評価

$s = O(\sigma^{-2})$を満たす解[7-1]

$h(|x_1|) < \infty$なので、 $I(s) = \frac{d}{2}\ln s + o(\ln s) \quad \text{as } s \to \infty.$

$$F(s) = \frac{d}{2}\ln(\sigma^2 s) + \frac{\delta}{2}\{\sigma^2 s - 1 - \ln(\sigma^2 s)\} + o(\ln s) \quad \text{as } s \to \infty.$$

上記の$F'(s) = 0$の解$\sigma^2 s_{\mathrm{opt}} = 1 - d/\delta + o(1)$を使うと、

$$\lim_{\sigma^2 \to 0} F(s_{\mathrm{opt}}) = o(\ln \sigma^{-2}).$$

$s^{-1} = \delta^{-1}\mathrm{MMSE}(s)$かつ$s < \infty$の解

$$\lim_{\sigma^2 \to 0} F(s) = I(s) - \frac{\delta}{2}\{1 + \ln s\} + \frac{\delta - d}{2}\lim_{\sigma^2 \to 0} \ln \sigma^{-2}.$$

$\delta - d > 0$なので、 $\lim_{\sigma^2 \to 0}\{F(s) - F(s_{\mathrm{opt}})\} > 0.$ ■

[7-1] Y. Wu and S. Verdú, “MMSE dimension,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 8, pp. 4857-4879, Aug. 2011.

状態発展方程式

閾値関数η_tを使ったAMP

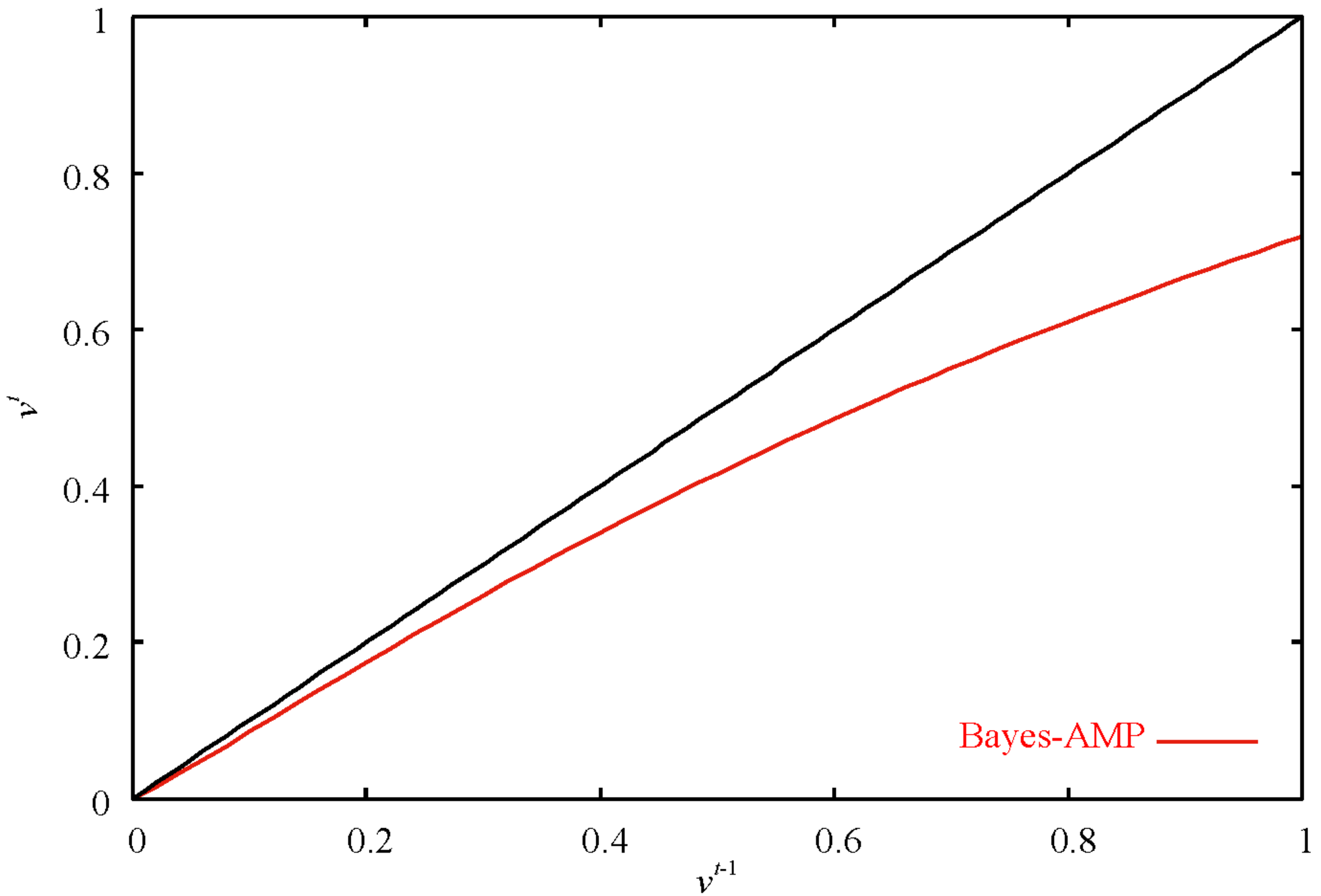
$$v^t = \sigma^2 + \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left[\left\{x_n - \eta_t\left(x_n + \sqrt{v^{t-1}}\omega_n\right)\right\}^2\right], \qquad v^0 = 1.$$

ベイズ最適AMP

$$v^t = \sigma^2 + \frac{1}{\delta}\mathrm{MMSE}(1/v^{t-1}), \qquad v^0 = 1.$$

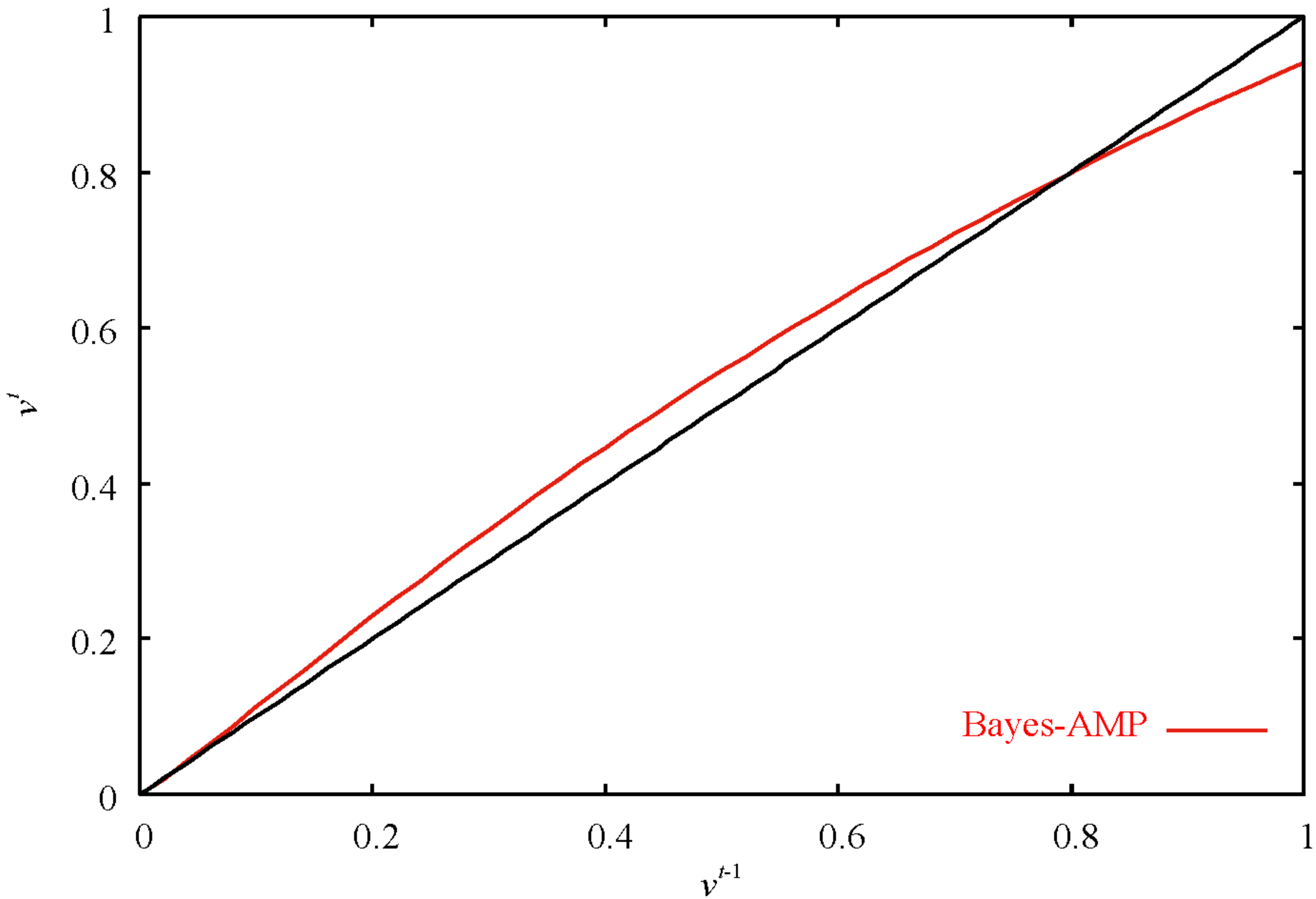
ベイズ最適AMPでない限り、不動点方程式がベイズ最適な推定法のものからずれている。

チャート（不動点が唯一）



信号密度$\rho = 0.3$のBG事前分布、$1/\sigma^2 = 60$ dB、$\delta = 0.55$

チャート(不動点が複数)



信号密度$\rho = 0.3$のBG事前分布、$1/\sigma^2 = 60$ dB、$\delta = 0.42$

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

AMPの最適性

AMPは、次の2条件を満たすときに、
情報理論的な圧縮限界を達成する。

条件1

閾値関数η_tとして、ベイズ最適なものが使用されている。

条件2

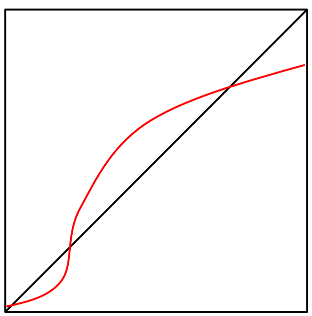
状態発展方程式の不動点は唯一である。

複数不動点への対処法1

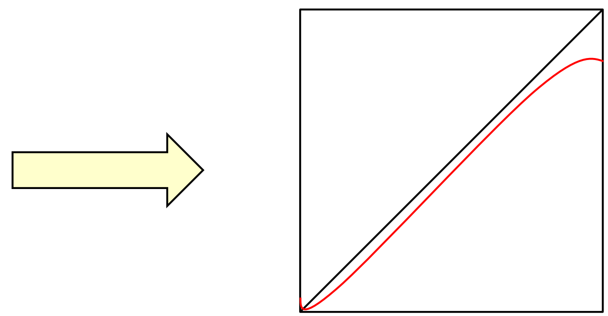
電力配分[3-3,7-2]

- 不動点方程式の解が唯一になるように、観測行列の列ベクトルのノルムにばらつきを持たせる。

- 高SNRでの性能が悪化するという欠点がある。



電力配分なし



電力配分あり

[7-2] G. Caire, R. R. Müller, and T. Tanaka, “Iterative multiuser joint decoding: Optimal power allocation and low-complexity implementation,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 50, no. 9, pp. 1950–1973, Sep. 2004.

複数不動点への対処法2

空間結合[7-3,7-4,7-5]

不動点方程式の解が唯一になるように、
観測行列に空間結合構造を導入する。

[7-3] S. Kudekar, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, “Threshold saturation via spatial coupling: Why convolutional LDPC ensembles perform so well over the BEC,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 2, pp. 803–834, Feb. 2011.

[7-4] K. Takeuchi, T. Tanaka, and T. Kawabata, “Performance improvement of iterative multiuser detection for large sparsely spread CDMA systems by spatial coupling,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 61, no. 4, pp. 1768–1794, Apr. 2015.

[7-5] D. L. Donoho, A. Javanmard, and A. Montanari, “Information theoretically optimal compressed sensing via spatial coupling and approximate message passing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 59, no. 11, pp. 7434–7464, Nov. 2013.

空間結合

$\boldsymbol{A}$を$(L+W-1)\times(L+2W-2)$ブロック帯行列に拡張

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}[0,-W+1]\cdots\boldsymbol{A}[0,0] & & & \\ & \ddots & \ddots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & & \ddots & \ddots \\ & \boldsymbol{A}[L+W-2,L-1] & & \boldsymbol{A}[L+W-2,L+W-2] \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}[l,l']\in\mathbb{R}^{M\times N}:\mathcal{N}(0,1/WM)$に従うi.i.d.要素を持つ。

境界条件

ブロック信号ベクトル

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}[-W+1], \dots \boldsymbol{x}[L+W-2])^{\mathrm{T}}$$

境界条件

開始セクション$l \in \{-W+1, \dots, -1\}$と終了セクション$l \in \{L, \dots, L+W-2\}$における信号ブロック$\boldsymbol{x}[l]$は、干渉+雑音電力が$\sigma^2$で推定できるような工夫を施す。

注意

境界セクションの干渉＋雑音電力をベイズ最適な推定法が達成するものより小さい値に設定する必要がある。

AMPの状態発展方程式[7-4,7-5]

状態発展方程式

AMPの反復tセクションlにおけるMSEは、大システム極限で $\mathrm{MMSE}(s^t[l])$に収束する。

信号対干渉＋雑音比（SINR）

$$s^t[l] = \frac{1}{W}\sum_{w=0}^{W-1}\frac{1}{v^{t-1}[l+w]},$$

干渉＋雑音電力

$$v^t[l] = \sigma^2 + \frac{1}{\delta W}\sum_{w=0}^{W-1}\mathrm{MMSE}(s^t[l-w]).$$

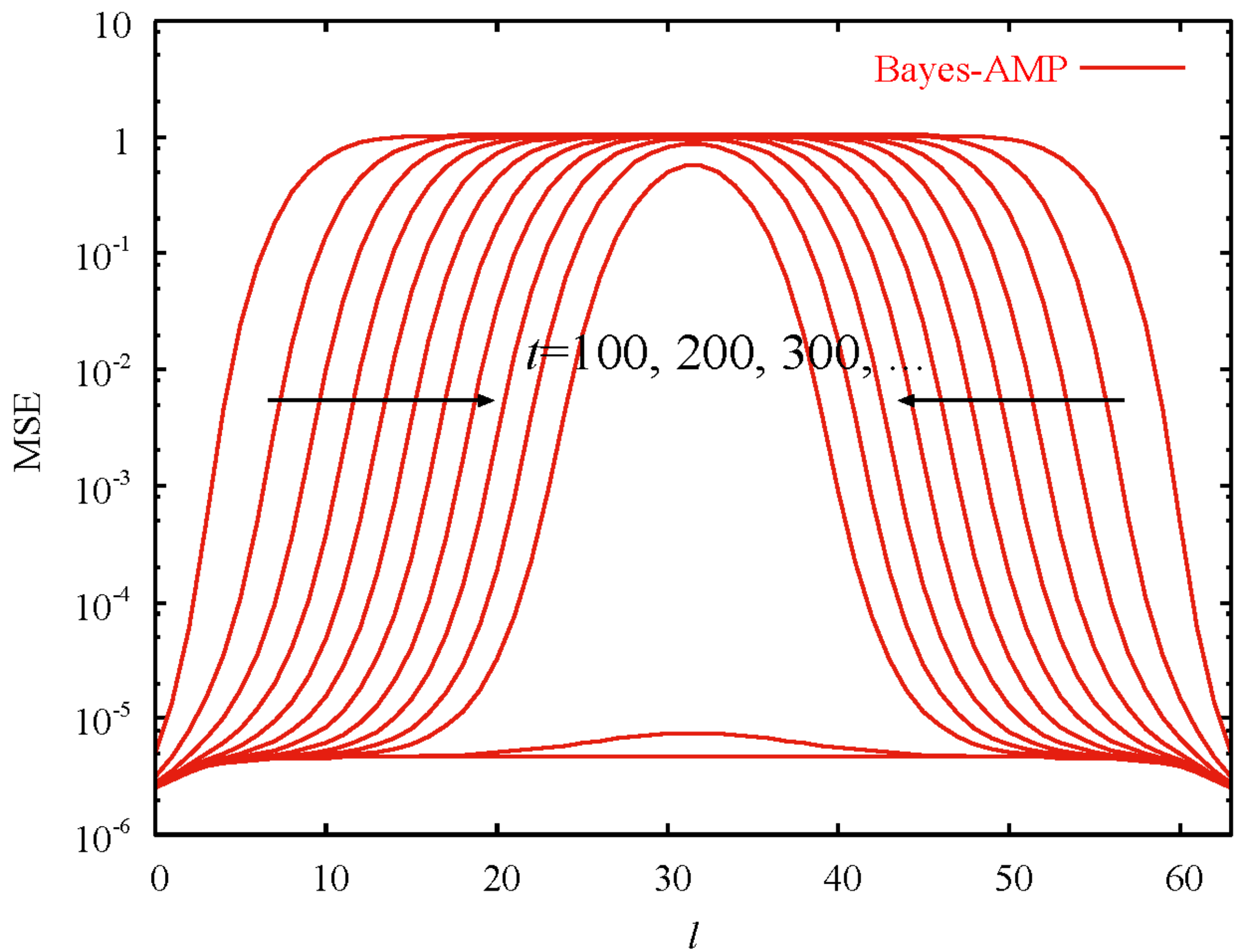
境界条件

$$v^t[l] = \sigma^2 \ \text{ for } l \notin \{0,\dots,L-1\}.$$

初期条件

$$v^0[l] = 1 \ \text{ for } l \in \{0,\dots,L-1\}.$$

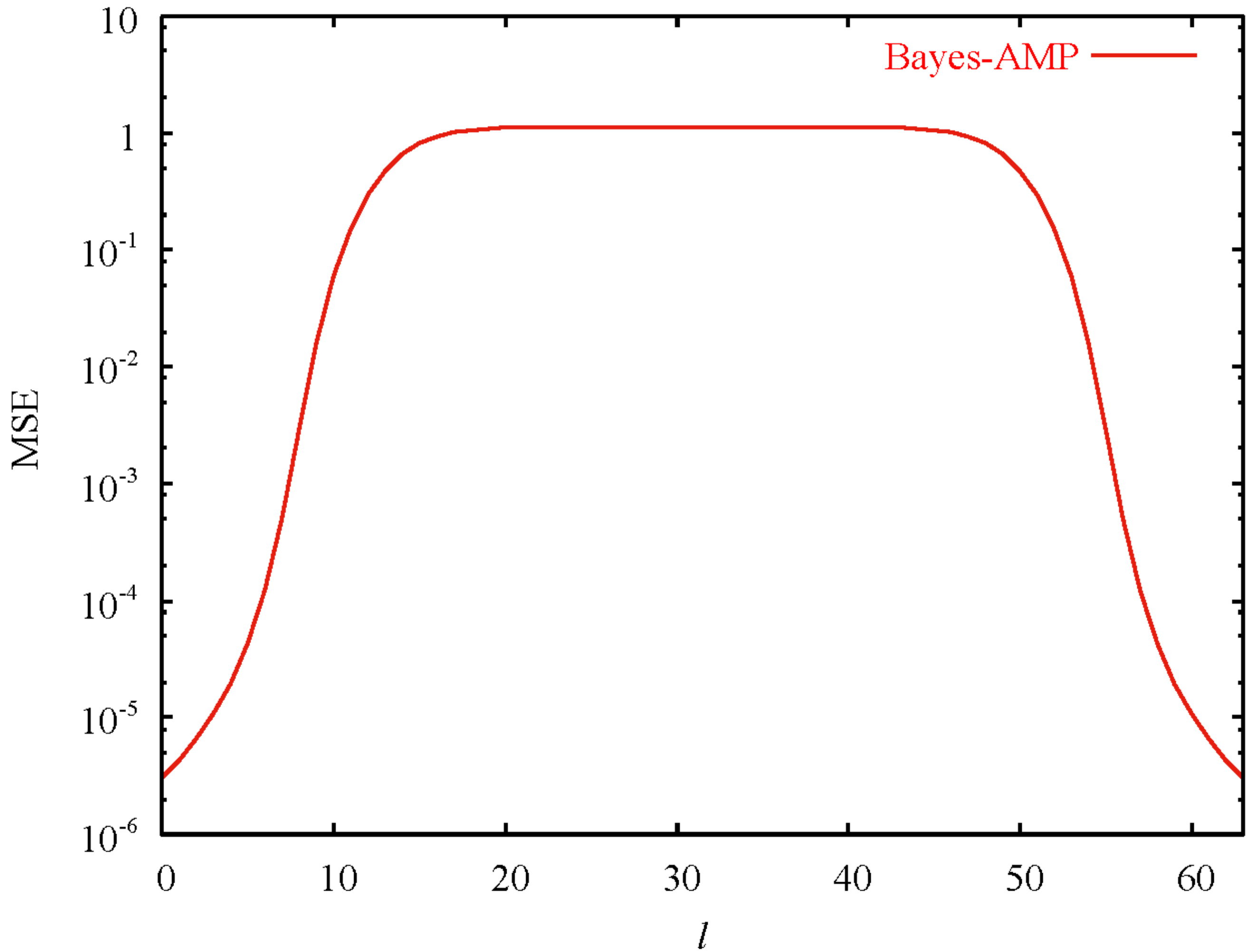
数値的評価



信号密度$\rho = 0.3$のBG事前分布、$1/\sigma^2 = 60$ dB、

$L = 64$、$W = 4$、$\delta = 0.39$

数値的評価



信号密度$\rho = 0.3$のBG事前分布、$1/\sigma^2 = 60$ dB、
$L = 64$、$W = 4$、$\delta = 0.38$、$t \to \infty$