メッセージ伝播法入門
第８回講義資料
空間結合の現象論

九州大学
平成30年10月10日～10月12日

豊橋技術科学大学
電気・電子情報工学系
准教授　竹内啓悟

AMPの状態発展方程式[7-4,7-5]

状態発展方程式

AMPの反復tセクションlにおけるMSEは、大システム極限でMMSE$(s^t[l])$に収束する。

信号対干渉＋雑音比（SINR）

$$s^t[l] = \frac{1}{W}\sum_{w=0}^{W-1}\frac{1}{\sigma^2 - (\sigma^2 - v^{t-1}[l+w])},$$

干渉＋雑音電力

$$\sigma^2 - v^t[l] = -\frac{1}{\delta W}\sum_{w=0}^{W-1}\mathrm{MMSE}(s^t[l-w]).$$

境界条件

$$v^t[l] = \sigma^2 \ \text{ for } l \notin \{0, \dots, L-1\}.$$

初期条件

$$v^0[l] = 1 \ \text{ for } l \in \{0, \dots, L-1\}.$$

状態発展方程式の解

ポテンシャル

$$V(s) = vs - \int f(s)ds - \int g(v)dv,$$

$$f(s) = -\frac{\mathrm{MMSE}(s)}{\delta}, \qquad g(v) = \frac{1}{\sigma^2 - v},$$

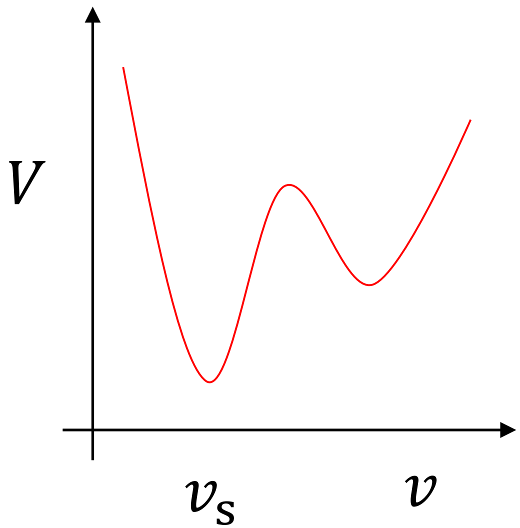
ただし、 $v = f(s)$.

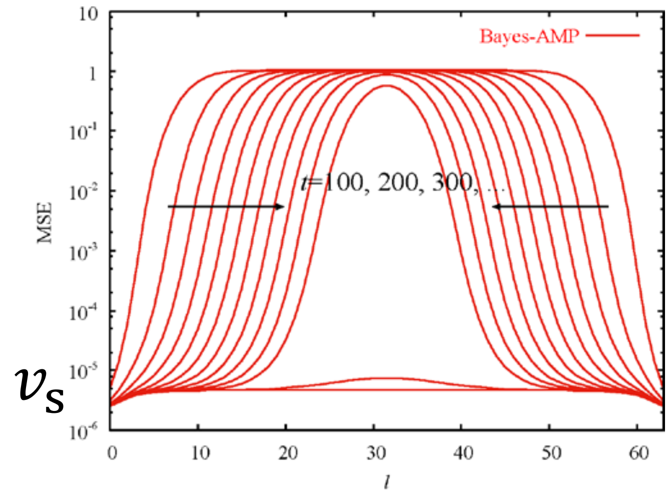
f, gはともに単調増加関数である。

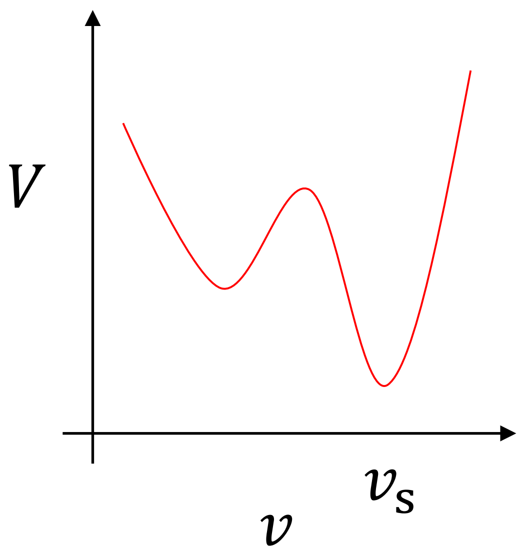
解の性質[7-4]

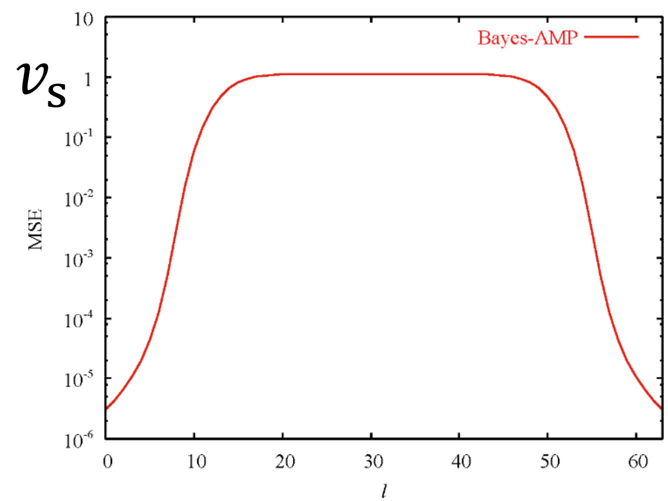
$V'(s) = 0$を満たす解の中で、ポテンシャルVを最小化する解をs_{s}とし、$v_{\mathrm{s}} = f(s_{\mathrm{s}})$を考える。境界における$v^t[l]$が$v_{\mathrm{s}}$以下に固定されているならば、$\gamma = W/L$を一定に保って$L \to \infty$とした後に$\gamma \to 0$とした極限で、状態発展方程式の解は唯一であり、解はすべてのlに関して$v^\infty[l] \le v_{\mathrm{s}}$を満たす。

ポテンシャルの形状と解









ポテンシャル

ポテンシャルと自由エネルギーの関係[7-4]

ポテンシャル$V(s)$は、ベイズ最適な推定法の性能を記述する自由エネルギー$F(s)$と本質的に等価である。

$$F(s) = I(s) + \frac{\delta}{2}\{\sigma^2 s - 1 - \ln(\sigma^2 s)\} + \frac{d}{2}\ln\sigma^2 .$$

AMPとベイズ最適な推定法との性能の定義が同じ

意義

観測行列に空間結合を施した場合のベイズ最適AMPは、情報理論的な圧縮限界を達成する。

証明

I-M関係式[1-9]$I'(s) = (1/2)\mathrm{MMSE}(s)$と$v = f(s)$を使うと、

$$V(s) = vs + \frac{2}{\delta} I(s) + \ln(\sigma^2 - v) + \left(\frac{d}{\delta} - 1\right) \ln \sigma^2$$

$$= \frac{2}{\delta} I(s) + sf(s) + \ln\{\sigma^2 - f(s)\} + \left(\frac{d}{\delta} - 1\right) \ln \sigma^2 .$$

不動点方程式$s^{-1} = \sigma^2 - f(s)$を代入しても、ポテンシャルの定性的な形状は変化しないので、

$$V(s) = \frac{2}{\delta} I(s) + \sigma^2 s - 1 - \ln(\sigma^2 s) + \frac{d}{\delta} \ln \sigma^2 = \frac{2}{\delta} F(s).$$

■

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

空間結合の現象論

状態発展方程式

$$s^t[l] = \frac{1}{2W-1}\sum_{w=-(W-1)}^{W-1} g(u^{t-1}[l+w]),$$

$$u^t[l] = \frac{1}{2W-1}\sum_{w=-(W-1)}^{W-1} f(s^t[l+w]).$$

連続体極限 $L, W \to \infty$ with $\gamma = W/L$ fixed.

$x = l/L$、$s(l/L,t) = s^t[l]$、$u(l/L,t) = u^t[l]$とおくと、

$$s(x,t) = \frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma} g\big(u(x+w,t-1)\big)dw,$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma} f\big(s(x+w,t)\big)dw.$$

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

空間結合の現象論

定常解

$$\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma} g\left(\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma} f\big(s(x+w+w')\big)dw'\right)dw - s(x) = 0.$$

$\gamma = 0$周りの2次のテーラー展開

$$\gamma^2\left[\frac{g''\big(f(s)\big)}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(s)\right)^2 + \frac{g'(f(s))}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(s)\right] \approx s - g\big(f(s)\big).$$

定常解が近似的に満たすべき微分方程式

変数変換$\tilde{u} = h\big(f(s)\big), h'(u) = \sqrt{g'(u)/3}$を行うと、

$$\gamma^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} \approx \frac{s - g\big(h^{-1}(\tilde{u})\big)}{h'(h^{-1}(\tilde{u}))}.$$

ポテンシャル

$$U'(\tilde{u}) = \frac{\tilde{V}'(h^{-1}(\tilde{u}))}{h'(h^{-1}(\tilde{u}))}, \qquad \tilde{V}'(u) = f^{-1}(u) - g(u).$$

U'を積分すると、

$$U(\tilde{u}) = \tilde{V}\left(h^{-1}(\tilde{u})\right) + \mathrm{Const.}$$

変数変換$u = f(s)$を使って、$\tilde{V}'$を積分すると、

$$\tilde{V}(f(s)) = \int [f^{-1}(u) - g(u)]du = \int \left[s - g\left(f(s)\right)\right] f'(s)ds$$

$$= sf(s) - \int g(u)du - \int f(s)ds = V(s).$$

$U, \tilde{V}, V$の定性的なポテンシャル形状は同一である。

古典力学

運動方程式

$$\gamma^2 \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} = -[-U'(\tilde{u})].$$

$\tilde{u}(x)$: 時刻$x \in [0,1]$における質量γ^2の質点の位置

境界条件

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = u_0.$$

初期位置と終了位置が指定された場合に、
力学的に可能な運動は何か？

力学的エネルギー保存則

運動方程式に$d\tilde{u}/dx$をかけて積分すると、

$$\frac{\gamma^2}{2}\left(\frac{d\tilde{u}}{dx}\right)^2 + [-U(\tilde{u})] = \text{Const.}$$

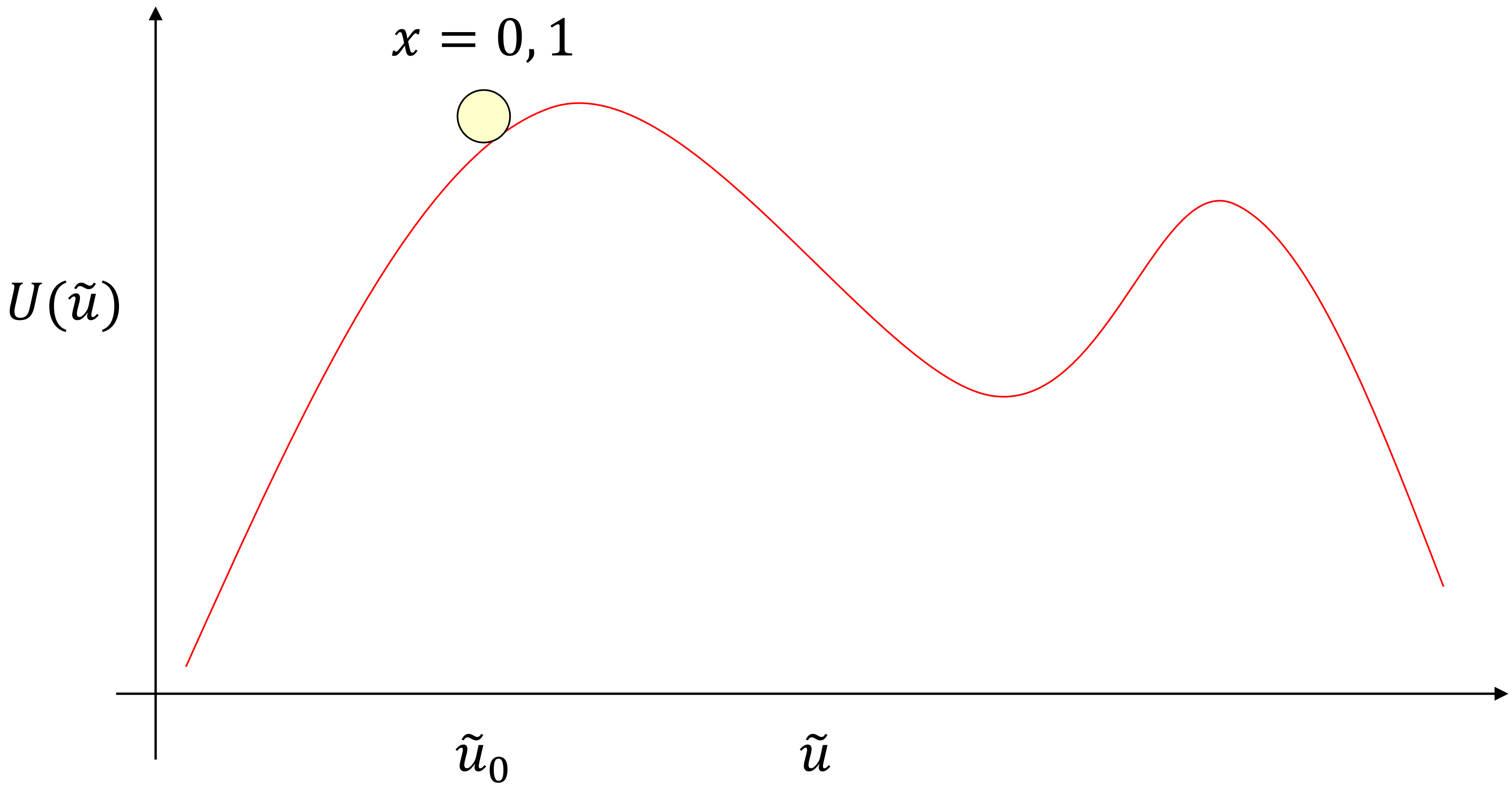
運動エネルギー　　位置エネルギー

時刻x_0に位置エネルギーが高い場所u_0から時刻x_1に位置エネルギーの低い場所u_1（$-U(u_0) > -U(u_1)$）に移動すると、

$$\frac{\gamma^2}{2}\left(\frac{d\tilde{u}}{dx}\right)^2\Bigg|_{x=x_1} = \frac{\gamma^2}{2}\left(\frac{d\tilde{u}}{dx}\right)^2\Bigg|_{x=x_0} - U(u_0) + U(u_1) > 0.$$

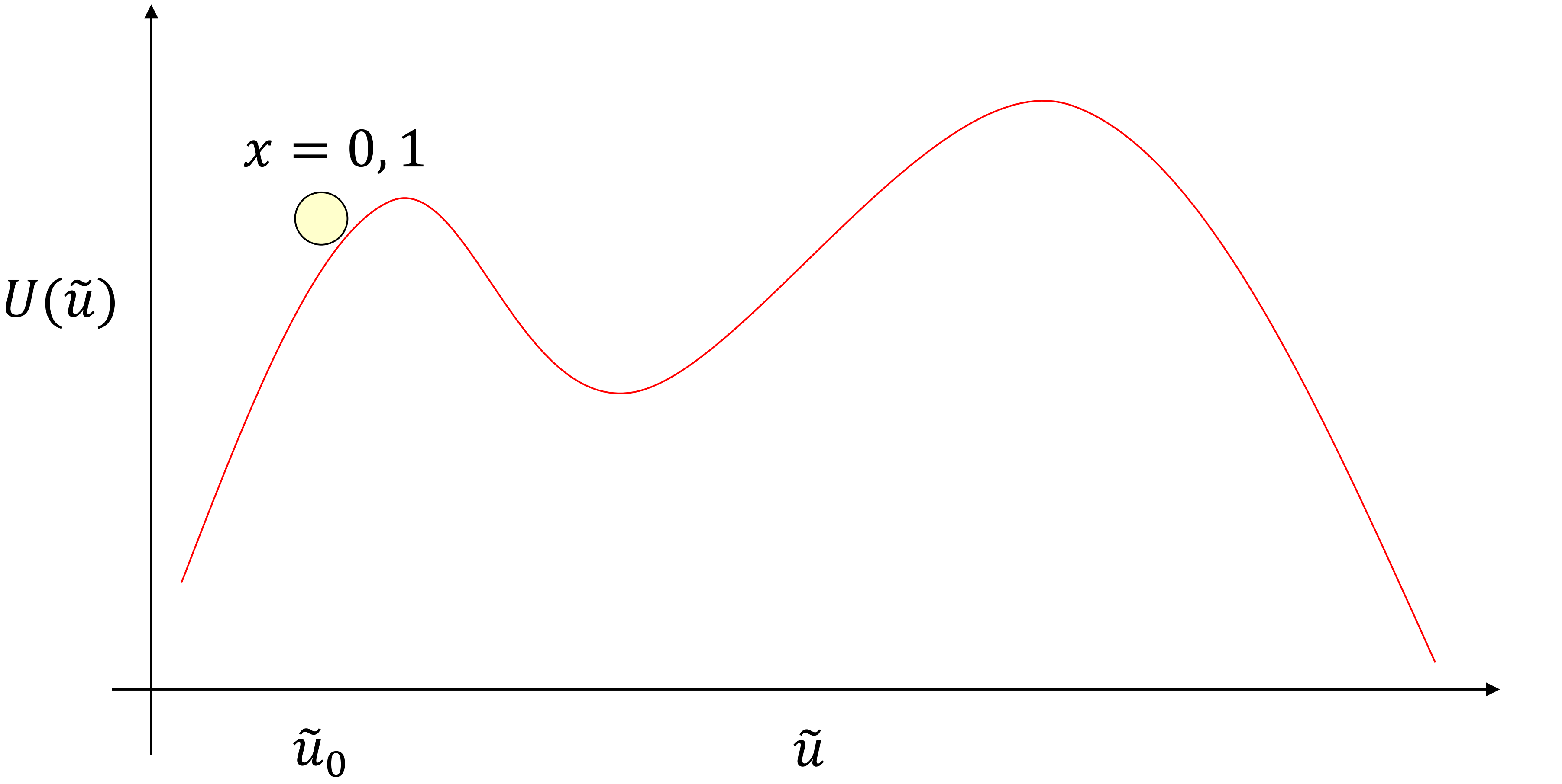
質点は位置$\tilde{u}_1$では静止できない。

可能な運動が唯一の場合



どんな運動が可能か？

可能な運動が複数の場合



どんな運動が可能か？

本講義のまとめ

ノイズなしの線形観測からの信号再構成

最小計算量・・・$\mathcal{O}(IMN)$

I : システムサイズに依存しない反復回数

最良な圧縮性能

圧縮率δ ＞ 信号要素のレニー情報次元d

空間結合圧縮センシングに対するベイズ最適AMPは、
最小計算量で最良な圧縮性能を達成する。

圧縮センシングの研究の流れ

1990年代

信号事前分布は未知

⇒ ST関数は最悪評価の意味で最良

2000年代

L1ノルム最小化による信号再構成

⇒ 性能はST関数を使ったAMPと同じ

2010年代

空間結合＋ベイズ最適AMP

信号事前分布が未知の場合は未解決