メッセージ伝播法の入門から最先端まで
第6回講義資料
状態発展法：厳密なアプローチ

九州大学
令和元年10月10日

豊橋技術科学大学
電気・電子情報工学系
准教授　竹内啓悟

一般化誤差モデル

$\boldsymbol{h}_t \in \mathbb{R}^N$: 反復tにおける閾値処理前の推定誤差

$\boldsymbol{q}_{t+1} \in \mathbb{R}^N$: 反復tにおける閾値処理後の推定誤差

$\tilde{\boldsymbol{q}}_{t+1} \in \mathbb{R}^N$: 以下の漸近直交性を保つための$\boldsymbol{q}_{t+1}$の補正

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{t+1} \to 0 \ \text{ for all } t' \leq t.$$

$\boldsymbol{b}_t = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t \in \mathbb{R}^N$: 漸近的にガウス分布するベクトル

$\boldsymbol{m}_t \in \mathbb{R}^N$: メッセージ伝播法の定義から決まるベクトル

$\tilde{\boldsymbol{m}}_t \in \mathbb{R}^N$: 以下の条件を満たす$\boldsymbol{m}_t$の補正

$$\tilde{\boldsymbol{m}}_t = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_t, \qquad \frac{1}{N}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{m}}_t \to 0 \ \text{ for all } t' \leq t.$$

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

一般化誤差モデル[6-1]

観測モデル

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}.$$

一般化誤差モデル

$$\boldsymbol{b}_t = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t, \quad \tilde{\boldsymbol{q}}_t = \boldsymbol{q}_t - \sum_{t'=0}^{t-1} \langle \partial_{t'} \boldsymbol{\psi}_{t-1} \rangle \boldsymbol{h}_{t'}, \quad [\partial_{t'} \boldsymbol{\psi}_t]_n = \frac{\partial \psi_{t,n}}{\partial h_{t',n}}.$$

$$\boldsymbol{m}_t = \boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{B}_{t+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \tilde{\boldsymbol{w}}), \quad \tilde{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{t+1} = (\boldsymbol{b}_0, \dots, \boldsymbol{b}_t).$$

$$\boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{m}}_t, \quad \tilde{\boldsymbol{m}}_t = \boldsymbol{m}_t - \sum_{t'=0}^{t} \langle \partial_{t'} \boldsymbol{\phi}_t \rangle \boldsymbol{b}_{t'}, \quad [\partial_{t'} \boldsymbol{\phi}_t]_n = \frac{\partial \phi_{t,n}}{\partial b_{t',n}}$$

$$\boldsymbol{q}_{t+1} = \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{H}_{t+1}, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{H}_{t+1} = (\boldsymbol{h}_0, \dots, \boldsymbol{h}_t).$$

[6-1] K. Takeuchi, “A unified framework of state evolution for message-passing algorithms,” in *Proc. 2019 IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, Paris, France, pp. 151-155, Jul. 2019.

AMPの誤差モデル

AMP

$$\boldsymbol{z}^t = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}^t + \frac{\xi_{t-1}}{\delta}\boldsymbol{z}^{t-1}, \qquad \xi_t = \langle \eta_t'\left(\widehat{\boldsymbol{x}}^t + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^t\right)\rangle,$$

$$\widehat{\boldsymbol{x}}^{t+1} = \eta_t\left(\widehat{\boldsymbol{x}}^t + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^t\right).$$

閾値処理前後の誤差

$$\boldsymbol{h}_t = \widehat{\boldsymbol{x}}^t + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^t - \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{q}_{t+1} = \widehat{\boldsymbol{x}}^{t+1} - \boldsymbol{x}.$$

AMPの誤差モデル

$$\psi_t(\boldsymbol{h}_t, \boldsymbol{x}) = \eta_t(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}_t) - \boldsymbol{x},$$ 要素ごとに共通

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}_{t+1} = \boldsymbol{q}_{t+1} - \langle \eta_t'(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}_t)\rangle \boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{q}_{t+1} - \xi_t \boldsymbol{h}_t,$$

$$\boldsymbol{b}_t = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{q}}_t, \qquad \widetilde{\boldsymbol{m}}_t = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_t.$$

$\boldsymbol{\phi}_t$の導出

- $\boldsymbol{h}_t, \widetilde{\boldsymbol{m}}_t, \widetilde{\boldsymbol{q}}_t$の定義と特異値分解$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$を使うと、

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_t = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{q}_t + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^t\right) = \boldsymbol{b}_t + \xi_{t-1}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-1} + \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^t, \qquad \widetilde{\boldsymbol{m}}_{-1} = \boldsymbol{0}.$$

- $\boldsymbol{z}^t$の定義に$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}$を代入し、左から$\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$をかける。

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^t = -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t + \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} + \frac{\xi_{t-1}}{\delta}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^{t-1}, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}.$$

- $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^t$を消去する。

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_t = \boldsymbol{b}_t + \xi_{t-1}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-1} - \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{b}_t + \xi_{t-1}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-1}) + \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$$
$$+ \frac{\xi_{t-1}}{\delta}(\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-1} - \boldsymbol{b}_{t-1} - \xi_{t-2}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-2}). \qquad \widetilde{\boldsymbol{m}}_t = \boldsymbol{b}_t = \boldsymbol{0} \text{ for } t < 0.$$

- $\{\boldsymbol{D}_{t'}\}$を対角行列として、**Λが適切な条件を満たせば**、

$$\boldsymbol{m}_t = \boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{B}_{t+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \widetilde{\boldsymbol{w}}) = \sum_{t'=0}^{t} \boldsymbol{D}_{t'}\boldsymbol{b}_{t'} + \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}.$$

仮定

観測行列

- 観測行列$\boldsymbol{A}$は右直交不変である。

  ノイズベクトル$\boldsymbol{w}$に直交不変性がない場合は、
  左直交不変性も必要。

- $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$の経験固有値分布は、大システム極限においてサポートが有界閉集合である決定論的な分布に概収束する。

写像の条件

$\boldsymbol{\phi}_t$と$\boldsymbol{\psi}_t$は、リプシッツ連続で、以下の分離条件を満たす。

$$[\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{b}_0, \dots, \boldsymbol{b}_t, \boldsymbol{\Lambda}, \tilde{\boldsymbol{w}})]_n = \phi_{t,n}\left(b_{0,n}, \dots, b_{t,n}, \lambda_n, \tilde{w}_n\right),$$

$$[\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{h}_0, \dots, \boldsymbol{h}_t, \boldsymbol{x})]_n = \psi_{t,n}\left(h_{0,n}, \dots, h_{t,n}, x_n\right).$$

写像は入力の要素毎に作用する。

定理6.1[6-1]

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$の漸近固有値分布のモーメントが、MP分布のものと$T$次まで一致するならば、すべての$t < T$に対して、

$$\langle \partial_{t'} \tilde{\boldsymbol{m}}_t \rangle \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \quad \text{for all } t' \leq t.$$

さらに、すべての$t < T - 1$に対して、以下の状態発展方程式は厳密である。

$$v^t = \sigma^2 + \frac{1}{\delta}\Psi_{t-1}(v^{t-1}), \qquad v^{-1} = 1,$$

$$\lim_{M=\delta N \to \infty} \frac{1}{N}\mathbb{E}[\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}^{t+1}\|^2] = \Psi_t(v^t).$$

注意

線形システムの場合、$\boldsymbol{m}_t$と$\tilde{\boldsymbol{m}}_t$を区別する意味はない。

$$\boldsymbol{m}_0 = \boldsymbol{D}_0\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{m}}_0 = \boldsymbol{m}_0 - \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{D}_0)\boldsymbol{b}_0.$$

$\boldsymbol{D}_0$を$\boldsymbol{D}_0 - N^{-1}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{D}_0)\boldsymbol{I}_N$と再定義すれば、$\boldsymbol{m}_0 = \tilde{\boldsymbol{m}}_0$を得る。

定理6.1の証明手順

手順1（第6回、第7回講義資料）

- 定理6.2：一般化誤差モデルの解析

  重要な補助的結果：補題6.1、6.2、7.1

  技術的な補助的結果：補題7.2

手順2（第8回講義資料）

- 定理6.1前半を証明する。

  厳密には帰納法を使って、定理6.2の証明と同時並行で行う。

手順3（第8回講義資料）

- 定理6.2を使って、定理6.1後半を証明する。

表記

フルランク縦長行列$\boldsymbol{M}$の特異値分解

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}},\ \ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}} = \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\parallel}, \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\perp}\right).$$

左特異ベクトル

$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\parallel}$：正の特異値に対応する左特異ベクトル

$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\perp}$：ゼロ特異値に対応する左特異ベクトル

射影行列

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}^{\perp} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\perp}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}.$$

状態発展法特有の定義

$$\boldsymbol{\beta}_t = \left(\tilde{\boldsymbol{Q}}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{Q}}_t\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{Q}}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t, \qquad \tilde{\boldsymbol{q}}_t^{\perp} = \boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{Q}}_t}^{\perp}\tilde{\boldsymbol{q}}_t,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \left(\tilde{\boldsymbol{M}}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{M}}_t\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{M}}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{m}}_t, \qquad \tilde{\boldsymbol{m}}_t^{\perp} = \boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{M}}_t}^{\perp}\tilde{\boldsymbol{m}}_t.$$

$\boldsymbol{o}(1)$：要素がすべて$o(1)$の有限次元ベクトル

定理6.2[6-1]

$\mathcal{E}_{t,t'} = \{\boldsymbol{B}_{t'}, \widetilde{\boldsymbol{M}}_{t'}, \boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{t+1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Sigma}\}$とする。

(A1) 条件$\mathcal{E}_{t,t}$の下で、

$$\boldsymbol{b}_t \sim \boldsymbol{B}_t\boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{B}_t\boldsymbol{o}(1) + \widetilde{\boldsymbol{M}}_t\boldsymbol{o}(1) + \boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\widetilde{\boldsymbol{M}}_t, \boldsymbol{B}_t)}\widetilde{\boldsymbol{V}}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t)}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t.$$

$\widetilde{\boldsymbol{V}} \in \mathcal{O}_{N-2t}$は$\mathcal{E}_{t,t}$の条件下でハール直交行列である。

(A2) $v_t = \lim_{M=\delta N\to\infty} N^{-1}\|\tilde{\boldsymbol{q}}_t^{\perp}\|^2$として、$\{\tilde{\boldsymbol{b}}_t\}$を逐次的に定義する。

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_t = \widetilde{\boldsymbol{B}}_t\boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{z}_t, \qquad \text{independent } \boldsymbol{z}_t \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, v_t\boldsymbol{I}_N).$$

$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_t$を$\boldsymbol{\phi}_t$と同じ分離条件を満たすリプシッツ連続関数とする。
すべて$t' \leq t$に対して、大システム極限において

$$\langle\partial_{t'}\tilde{\boldsymbol{\phi}}_t(\boldsymbol{B}_{t+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \widetilde{\boldsymbol{w}})\rangle - \mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_{t+1}}\left[\langle\partial_{t'}\tilde{\boldsymbol{\phi}}_t\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{t+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \widetilde{\boldsymbol{w}}\right)\rangle\right] \overset{\text{a.s.}}{\to} 0,$$

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\left(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_t(\boldsymbol{B}_{t+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \widetilde{\boldsymbol{w}}) - \sum_{\tau=0}^{t}\langle\partial_{\tau}\tilde{\boldsymbol{\phi}}_t(\boldsymbol{B}_{t+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \widetilde{\boldsymbol{w}})\rangle\boldsymbol{b}_{\tau}\right) \overset{\text{a.s.}}{\to} 0.$$

定理6.2の続き

（B1） 条件$\mathcal{E}_{t,t+1}$の下で、

$$\boldsymbol{h}_t \sim \boldsymbol{H}_t\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{H}_t\boldsymbol{o}(1) + \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{t+1}\boldsymbol{o}(1) + \boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{t+1},\boldsymbol{H}_t)}\widetilde{\boldsymbol{V}}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\boldsymbol{B}_{t+1},\widetilde{\boldsymbol{M}}_t)}\right)^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{m}}_t.$$

$\widetilde{\boldsymbol{V}} \in \mathcal{O}_{N-2t-1}$は$\mathcal{E}_{t,t+1}$の条件下でハール直交行列である。

（B2） $\tilde{v}_t = \lim_{M=\delta N\to\infty} N^{-1}\|\widetilde{\boldsymbol{m}}_t^{\perp}\|^2$として、$\{\widetilde{\boldsymbol{h}}_t\}$を逐次的に定義する。

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}_t = \widetilde{\boldsymbol{H}}_t\boldsymbol{\alpha}_t + \tilde{\boldsymbol{z}}_t, \qquad \text{independent}\ \tilde{\boldsymbol{z}}_t \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \tilde{v}_t\boldsymbol{I}_N).$$

$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_t$を$\boldsymbol{\psi}_t$と同じ分離条件を満たすリプシッツ連続関数とする。
すべて$t' \leq t$に対して、大システム極限において

$$\langle\partial_{t'}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{H}_{t+1},\boldsymbol{x})\rangle - \mathbb{E}_{\widetilde{\boldsymbol{Z}}_{t+1}}\left[\langle\partial_{t'}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_t\left(\widetilde{\boldsymbol{H}}_{t+1},\boldsymbol{x}\right)\rangle\right] \overset{\text{a.s.}}{\to} 0,$$

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\left(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{H}_{t+1},\boldsymbol{x}) - \sum_{\tau=0}^{t}\langle\partial_\tau\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{H}_{t+1},\boldsymbol{x})\rangle\boldsymbol{h}_\tau\right) \overset{\text{a.s.}}{\to} 0.$$

補題6.1[6-2, 6-3]

$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{N\times t}$を観測行列として、ハール直交行列$\boldsymbol{V} \in \mathcal{O}_N$をノイズなしの理想的な観測をしたときの出力行列を$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{N\times t}$とする。

仮定　$t < N$として、$\boldsymbol{X}$はフルランクであり、$\boldsymbol{V}$と独立である。

主張　行列$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$が条件として与えられたときの$\boldsymbol{V}$の事後分布は、以下で定義される直交行列$\boldsymbol{V}' \in \mathcal{O}_N$の分布と等しい。

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\tilde{\boldsymbol{V}}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{X}}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}.$$

$\tilde{\boldsymbol{V}} \in \mathcal{O}_{N-t}$は、$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$の条件下でハール直交行列である。

[6-2] S. Rangan, P. Schniter, and A. K. Fletcher, “Vector approximate message passing,” in *Proc. 2017 IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, Aachen, Germany, Jun. 2017, pp. 1588–1592.

[6-3] K. Takeuchi, “Rigorous dynamics of expectation-propagation-based signal recovery from unitarily invariant measurements,” in *Proc. 2017 IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, Aachen, Germany, Jun. 2017, pp. 501–505.

補題6.1の証明手順

手順1

以下の等式を満たす直交行列$\widetilde{\boldsymbol{V}} \in \mathcal{O}_{N-t}$の存在を証明する。

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{X}} = \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\parallel}, \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}}\right).$$

手順2

等式を$\boldsymbol{V}$について解いた式と$\boldsymbol{V}'$の右辺とが等しいことを証明する。

手順3

$\widetilde{\boldsymbol{V}}$の統計的性質を評価する。

手順1

観測モデル$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{X}$から$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$が従うので、
$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$は共通の特異値と右特異ベクトルを持つ。

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}_X(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{O})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}.$$

特異値分解

$\boldsymbol{X}$はフルランクなので、$\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{t\times t}$の逆行列が存在する。
特異値分解を$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{X}$に代入して整理すると、

$$\boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Phi}_X \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_t \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Phi}_X = [\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{V}_1]$の最初の$t$個の列$\boldsymbol{V}_0$は、$\boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}$に等しい。

$\boldsymbol{V}_0$と$\boldsymbol{V}_1$の列直交性 ⇒ $\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Phi}_X = \left(\boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}, \boldsymbol{\Phi}_Y^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}}\right)$, $\exists\widetilde{\boldsymbol{V}} \in \mathbb{R}^{(N-t)\times(N-t)}$.

$\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{I}$ ⇒ $\boldsymbol{I} = \widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Phi}_Y^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_Y^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}} = \widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{V}}$.

手順2

等式$\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Phi}_X = \left(\boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}, \boldsymbol{\Phi}_Y^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}}\right)$に右から$\boldsymbol{\Phi}_X^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{\Phi}_X^{\parallel}, \boldsymbol{\Phi}_X^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}$をかける。

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}\left(\boldsymbol{\Phi}_X^{\parallel}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Phi}_Y^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}}\left(\boldsymbol{\Phi}_X^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}\left(\boldsymbol{\Phi}_X^{\parallel}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$の証明

特異値分解$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}_X^{\parallel}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$と$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$を使う。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\Phi}_X^{\parallel}\right)^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}^2)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\Phi}_X^{\parallel}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}\left(\boldsymbol{\Phi}_X^{\parallel}\right)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

注意

$\boldsymbol{\Phi}_Y^{\parallel}\left(\boldsymbol{\Phi}_X^{\parallel}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$も成立する。

手順3

任意の直交行列$\mathbf{\Phi} \in \mathcal{O}_N$に対して、

$\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp} = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{\Phi}\boldsymbol{Y}}^{\perp}\boldsymbol{U}$を満たす直交行列$\boldsymbol{U} \in \mathcal{O}_{N-t}$ が存在する。

$$\because \quad \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\left(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\left(\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$$

$$= \mathbf{\Phi}\left\{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\right)^{-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\right\}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} - \mathbf{\Phi}\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\boldsymbol{Y}\right)^{-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$$

$$= \boldsymbol{P}_{\mathbf{\Phi}\boldsymbol{Y}}^{\perp} = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{\Phi}\boldsymbol{Y}}^{\perp}\left(\mathbf{\Phi}_{\mathbf{\Phi}\boldsymbol{Y}}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}. \qquad \blacksquare$$

同様に、$\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\parallel} = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{\Phi}\boldsymbol{Y}}^{\parallel}\boldsymbol{U}'$を満たす$\boldsymbol{U}' \in \mathcal{O}_t$も存在する。

$\widetilde{\boldsymbol{V}} \in \mathcal{O}_{N-t}$が満たすべき条件を調べる。

$\boldsymbol{V}\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{X}} \sim \boldsymbol{V}$から$\boldsymbol{X}$の条件下で$\left(\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\parallel}, \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}}\right)$はハール直交行列なので、

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\parallel}, \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}}\right) = \left(\mathbf{\Phi}_{\mathbf{\Phi}\boldsymbol{Y}}^{\parallel}\boldsymbol{U}', \mathbf{\Phi}_{\mathbf{\Phi}\boldsymbol{Y}}^{\perp}\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{V}}\right) \sim \left(\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\parallel}, \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}}\right) \text{ for given } \boldsymbol{X}.$$

手順3

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Phi Y}}^{\parallel}\boldsymbol{U}', \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Phi Y}}^{\perp}\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{V}}\right) \sim \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\parallel}, \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}}\right) \text{ for given } \boldsymbol{X}.$$

確認　$\boldsymbol{X}$の条件下で$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{X}$は左直交不変なので、

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Phi Y}}^{\parallel}\boldsymbol{U}' \sim \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\parallel}\boldsymbol{U}' \sim \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\parallel} \text{ for given } \boldsymbol{X}.$$

最後の等号は、左直交不変な行列の非零特異値に対応する
左特異ベクトルは、ハール分布するためである。

同様に、$\boldsymbol{X}$の条件下で$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{V}} \sim \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Phi Y}}^{\perp}\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{V}} \sim \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{V}}$を得る。

零特異値に対応する$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}$のハール分布性は主張できないため、

$$\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{V}} \sim \widetilde{\boldsymbol{V}} \text{ for given } \boldsymbol{X}, \qquad \boldsymbol{U} = \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Phi Y}}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Y}}^{\perp}.$$

これは$\widetilde{\boldsymbol{V}}$が$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$の条件下でハール直交行列であることを
意味している。 ■

補題6.2[6-4, 6-1]

$\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_t)^{\mathrm{T}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$とする。$f: \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}$をほとんど至るところ微分可能な関数として、

$$\mathbb{E}[z_1 f(\boldsymbol{z})] = \sum_{t'=1}^{t} \mathbb{E}[z_1 z_{t'}]\mathbb{E}[\partial_{t'} f(\boldsymbol{z})].$$

ただし、両辺の期待値の存在を仮定する。

証明

固有分解$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$に対して、$\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$と変数変換すると、

$$\mathbb{E}[z_1 f(\boldsymbol{z})] = \sum_{\tau=1}^{t} U_{1\tau}\mathbb{E}[\tilde{z}_\tau f(\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{z}})].$$

[6-4] S. Campese, “Fourth moment theorems for complex Gaussian approximation,” [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1511.00547.

補題6.2の証明

$\tilde{\mathbf{z}}$は独立なガウス要素を持つので、Steinの補題を使って、

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[z_1 f(\boldsymbol{z})] &= \sum_{\tau=1}^{t} U_{1\tau} \mathbb{E}[\tilde{z}_\tau^2] \mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}_\tau}(\boldsymbol{U}\tilde{\mathbf{z}})\right] \\
&= \sum_{\tau=1}^{t} U_{1\tau} [\boldsymbol{\Lambda}]_{\tau,\tau} \sum_{t'=1}^{t} U_{t'\tau} \, \mathbb{E}[\partial_{t'} f(\boldsymbol{z})] \\
&= \sum_{t'=1}^{t} [\boldsymbol{\Sigma}]_{1,t'} \mathbb{E}[\partial_{t'} f(\boldsymbol{z})] \\
&= \sum_{t'=1}^{t} \mathbb{E}[z_1 z_{t'}] \mathbb{E}[\partial_{t'} f(\boldsymbol{z})]. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$