# メッセージ伝播法の入門から最先端まで
# 第7回講義資料
# 状態発展法の一般論

九州大学
令和元年10月23日

豊橋技術科学大学
電気・電子情報工学系
准教授　竹内啓悟

# 疑似リプシッツ関数

次数$k$の疑似リプシッツ関数$f \in \mathcal{PL}(k)$

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| \le L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|\left(1 + \|\boldsymbol{x}\|^{k-1} + \|\boldsymbol{y}\|^{k-1}\right) \text{ for some } L > 0.$$

基本性質　$f: \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}$を次数$k$の疑似リプシッツ関数とする。

- $k = 1$ならば、$f$はリプシッツ連続である。
- $f$は無限遠で$\mathcal{O}(\|\boldsymbol{x}\|^k)$である。
- $f$がほとんど至るところ微分可能ならば、$\partial_{t'} f$は無限遠で$\mathcal{O}(\|\boldsymbol{x}\|^{k-1})$である。

最後の性質の証明

$$|\partial_{t'} f(\boldsymbol{x})| = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{f(\boldsymbol{x} + \Delta x \boldsymbol{e}_{t'}) - f(\boldsymbol{x})}{\Delta x} \right| \le L\left(1 + 2\|\boldsymbol{x}\|^{k-1}\right). \quad \blacksquare$$

# 補題7.1[6-3]

$f_n \colon \mathbb{R}^{\tau+1} \to \mathbb{R}$を次数$k$の疑似リプシッツ関数とする。

仮定
- $f_n$のリプシッツ係数$L_n > 0$は以下を満たす。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n^2 < \infty.$$

- $\{\epsilon_n \in \mathbb{R}\}$は極限$N \to \infty$で以下を満たす系列である。

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n|\epsilon_n|^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n|\epsilon_n|^{2k-2} < \infty.$$

- $\{\boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^{\tau}\}$と$\{b_n \in \mathbb{R}\}$は、極限$N \to \infty$で以下を満たす。

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n^i\|\boldsymbol{a}_n\|^{2k-2} < \infty, \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n^i|b_n|^{2k-2} < \infty \quad \text{for } i = 1, 2.$$

# 補題7.1の続き

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N-t}$は以下を満たす。

$$\frac{1}{N}\|\boldsymbol{x}\|^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} v > 0 \text{ as } N \to \infty \quad \text{for some } v > 0.$$

$\boldsymbol{x}$は、$\{\boldsymbol{\epsilon}_n\}$、$\{\boldsymbol{a}_n\}$、$\{b_n\}$、$\boldsymbol{E}$の条件下で直交不変である。

- $\boldsymbol{E} \in \mathbb{C}^{N\times t}$は極限$N \to \infty$で以下を満たす行列である。

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n \|[\boldsymbol{E}]_n\|^{\max\{2,2k-2\}} < \infty, \quad \lambda_{\min}\left(\frac{1}{N}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\right) > C \text{ for some } C > 0.$$

すると、$\{z_n\}$を独立な標準ガウス変数列として、極限$N \to \infty$で

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\{f_n\left(\boldsymbol{a}_n, b_n + \epsilon_n + \left[\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{E}}^{\perp}\boldsymbol{x}\right]_n\right) - \mathbb{E}_{z_n}\left[f_n(\boldsymbol{a}_n, b_n + \sqrt{v}z_n)\right]\right\} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

# 補題7.1の証明

$f_n(x) = L_n x$、$b_n = \epsilon_n = 0$を仮定した場合の確率収束性のみを示す。

$\boldsymbol{u}_2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_{N-t})$とすると、$\boldsymbol{u}_2$の直交不変性から、

$$\boldsymbol{u}_2 \sim \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{u}_2}^{\parallel} \|\boldsymbol{u}_2\|.$$

ただし、$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{u}_2}^{\parallel} \in \mathcal{O}_{(N-t)\times 1}$は$\|\boldsymbol{u}_2\|$と独立でハール分布する。

同様に、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N-t}$は左直交不変なので、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{x}}^{\parallel} \|\boldsymbol{x}\| \sim \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{u}_2}^{\parallel} \|\boldsymbol{x}\| \sim \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{u}_2\|} \boldsymbol{u}_2.$$

$\boldsymbol{u}_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_t)$を$\boldsymbol{u}_2$と独立なガウスベクトルとして、

$$\boldsymbol{\Phi}_E^{\perp} \boldsymbol{x} \sim \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{u}_2\|} \left( \boldsymbol{\Phi}_E^{\parallel} \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{\Phi}_E^{\perp} \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{\Phi}_E^{\parallel} \boldsymbol{u}_1 \right) \sim \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{u}_2\|} \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\delta},$$

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{u}_2\|} \boldsymbol{\Phi}_E^{\parallel} \boldsymbol{u}_1.$$

# 補題7.1の証明

仮定から、$z_n$の係数は$\sqrt{v}$に確率収束することに注意して、

$$\mathcal{E}_{\epsilon'} = \left\{ \left| \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2} - v \right| \le \epsilon' \right\}.$$

上記の事象$\mathcal{E}_{\epsilon'}$の発生確率は1に収束する。

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n \left[\boldsymbol{\Phi}_E^{\perp}\boldsymbol{x}\right]_n, \qquad \tilde{S}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n \left( \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{u}_2\|} z_n - \delta_n \right).$$

上記のように$S_N$と$\tilde{S}_N$を定義すると、$S_N \sim \tilde{S}_N$を得る。

$$\mathbb{P}(|S_N| > \epsilon) = \mathbb{P}\left(\left|\tilde{S}_N\right| > \epsilon\right)$$

$$= \mathbb{P}(\mathcal{E}_{\epsilon'})\mathbb{P}\left(\left|\tilde{S}_N\right| > \epsilon \middle| \mathcal{E}_{\epsilon'}\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{E}_{\epsilon'}^{\mathrm{c}}\right)\mathbb{P}\left(\left|\tilde{S}_N\right| > \epsilon \middle| \mathcal{E}_{\epsilon'}^{\mathrm{c}}\right)$$

$\rightarrow \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(|S_N'| > \epsilon | \mathcal{E}_{\epsilon'})$ as $N \to \infty$.

$$S_N' = \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{N\|\boldsymbol{u}_2\|}\sum_{n=1}^{N} L_n z_n.$$

次ページを参照

# 補題7.1の証明

性質

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n \delta_n \to 0 \ \text{ in probability.}$$

証明　Cauchy–Schwarzの不等式を使うと、

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n \delta_n\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n \left[\boldsymbol{\Phi}_E^{\parallel}\boldsymbol{u}_1\right]_n\right)^2\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\frac{\left\|\boldsymbol{\Phi}_E^{\parallel}\boldsymbol{u}_1\right\|^2}{N}\right]\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_n^2 \to 0.$$

$$\because \quad \mathbb{E}_{\boldsymbol{u}_1}\left[\left\|\boldsymbol{\Phi}_E^{\parallel}\boldsymbol{u}_1\right\|^2\right] = \mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{\Phi}_E^{\parallel}\left(\boldsymbol{\Phi}_E^{\parallel}\right)^{\mathrm{T}}\right\} = t.$$

■

# 補題7.1の証明

Chebyshevの不等式を使うと、

$$\mathbb{P}(|S_N'| > \epsilon | \mathcal{E}_{\epsilon'}) \leq \frac{\mathbb{E}[|S_N'|^2 | \mathcal{E}_{\epsilon'}]}{\epsilon^2} \leq \frac{v + \epsilon'}{N^2 \epsilon^2} \sum_{n=1}^{N} L_n^2 \to 0.$$

以上から、$S_N$は0に確率収束する。 ■

注意

一般かつ概収束の場合の証明は、疑似リプシッツ性を駆使した非常に技術的な証明が必要である。

# 補題7.2[3-4, Lemma 5]

$f: \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}$をリプシッツ連続関数として、$\tau$番目の変数に関する偏微分を$\partial_\tau f$と書く。(i)確率ベクトル$\boldsymbol{X}_N \in \mathbb{R}^t$は、極限$N \to \infty$において確率ベクトル$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^t$に分布収束する。(ii) $\mathbb{E}[\partial_\tau f(\boldsymbol{X}_N)]$は定義できる。(iii) $\mathbb{E}[\partial_\tau f(\boldsymbol{X})]$は定義できる。すると、

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[\partial_\tau f(\boldsymbol{X}_N)] = \mathbb{E}[\partial_\tau f(\boldsymbol{X})].$$

証明

Rademacherの定理から、リプシッツ連続関数$f$はほとんど至るところ微分可能である。定義から、$f$の偏微分は有界である。$\partial_\tau f$が定義される集合$C_f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^t: \partial_\tau f(\boldsymbol{x}) \text{ exists.}\}$に対して、条件(ii)と(iii)から、$\mathbb{P}(\boldsymbol{X}_N \in C_f) = \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in C_f) = 1$を得る。それ故、一般性を失うことなく、$\partial_\tau f$は有界かつ連続と仮定できる。補題7.2は、条件(i)と分布収束の定義から従う。 ■

# 補題7.2の使い方

$\{\boldsymbol{X}_{n,N} \in \mathbb{R}^t : n = 1, \ldots N\}$として、補題7.2における$\boldsymbol{X}_N \in \mathbb{R}^t$を確率$1/N$で$\boldsymbol{X}_{n,N}$を取る離散確率ベクトルとする。

手順1　有界リプシッツ連続関数$g$に対して、補題7.1を使って以下を証明する。

$$\mathbb{E}\left[g(\boldsymbol{X}_N)|\{\boldsymbol{X}_{n,N}\}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(\boldsymbol{X}_{n,N}) \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}[g(\boldsymbol{X})].$$

$\{\boldsymbol{X}_{n,N}\}$の条件下で、$\boldsymbol{X}_N$は$\boldsymbol{X}$に分布収束する。

手順2　補題7.2の条件(ii)と(iii)を確認して、

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \partial_\tau f(\boldsymbol{X}_{n,N}) = \mathbb{E}\left[\partial_\tau f(\boldsymbol{X}_N)|\{\boldsymbol{X}_{n,N}\}\right] \to \mathbb{E}[\partial_\tau f(\boldsymbol{X})].$$

# 一般化誤差モデル[6-1]

観測モデル

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}.$$

一般化誤差モデル

$$\boldsymbol{b}_t = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t, \quad \tilde{\boldsymbol{q}}_t = \boldsymbol{q}_t - \sum_{t'=0}^{t-1} \langle \partial_{t'} \boldsymbol{\psi}_{t-1} \rangle \boldsymbol{h}_{t'}, \quad [\partial_{t'} \boldsymbol{\psi}_t]_n = \frac{\partial \psi_{t,n}}{\partial h_{t',n}}.$$

$$\boldsymbol{m}_t = \boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{B}_{t+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \tilde{\boldsymbol{w}}), \quad \tilde{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{t+1} = (\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_t).$$

$$\boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{m}}_t, \quad \tilde{\boldsymbol{m}}_t = \boldsymbol{m}_t - \sum_{t'=0}^{t} \langle \partial_{t'} \boldsymbol{\phi}_t \rangle \boldsymbol{b}_{t'}, \quad [\partial_{t'} \boldsymbol{\phi}_t]_n = \frac{\partial \phi_{t,n}}{\partial b_{t',n}}$$

$$\boldsymbol{q}_{t+1} = \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{H}_{t+1}, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{H}_{t+1} = (\boldsymbol{h}_0, \ldots, \boldsymbol{h}_t).$$

[6-1] K. Takeuchi, “A unified framework of state evolution for message-passing algorithms,” in *Proc. 2019 IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, Paris, France, pp. 151-155, Jul. 2019.

# 表記

## フルランク縦長行列$\boldsymbol{M}$の特異値分解

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}} = \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\parallel}, \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\perp}\right).$$

## 左特異ベクトル

$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\parallel}$:正の特異値に対応する左特異ベクトル

$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\perp}$:ゼロ特異値に対応する左特異ベクトル

## 射影行列

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}}^{\perp} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\perp}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}.$$

## 状態発展法特有の定義

$$\boldsymbol{\beta}_t = \left(\tilde{\boldsymbol{Q}}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{Q}}_t\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{Q}}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t, \qquad \tilde{\boldsymbol{q}}_t^{\perp} = \boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{Q}}_t}^{\perp}\tilde{\boldsymbol{q}}_t,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \left(\tilde{\boldsymbol{M}}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{M}}_t\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{M}}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{m}}_t, \qquad \tilde{\boldsymbol{m}}_t^{\perp} = \boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{M}}_t}^{\perp}\tilde{\boldsymbol{m}}_t.$$

$\boldsymbol{o}(1)$:要素がすべて$o(1)$の有限次元ベクトル

# 定理6.2[6-1]

$\mathcal{E}_{\tau,\tau'} = \{\boldsymbol{B}_{\tau'}, \widetilde{\boldsymbol{M}}_{\tau'}, \boldsymbol{H}_\tau, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\tau+1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Sigma}\}$とする。

(A1) 条件$\mathcal{E}_{\tau,\tau}$の下で、

$$\boldsymbol{b}_\tau \sim \boldsymbol{B}_\tau \boldsymbol{\beta}_\tau + \boldsymbol{B}_\tau \boldsymbol{o}(1) + \widetilde{\boldsymbol{M}}_\tau \boldsymbol{o}(1) + \boldsymbol{\Phi}^\perp_{(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\tau, \boldsymbol{B}_\tau)} \widetilde{\boldsymbol{V}} \left( \boldsymbol{\Phi}^\perp_{(\boldsymbol{H}_\tau, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_\tau)} \right)^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{q}}_\tau.$$

$\widetilde{\boldsymbol{V}} \in \mathcal{O}_{N-2\tau}$は$\mathcal{E}_{\tau,\tau}$の条件下でハール直交行列である。

(A2) $v_\tau = \lim_{M=\delta N \to \infty} N^{-1} \|\widetilde{\boldsymbol{q}}_\tau^\perp\|^2$として、$\{\widetilde{\boldsymbol{b}}_\tau\}$を逐次的に定義する。

$$\widetilde{\boldsymbol{b}}_\tau = \widetilde{\boldsymbol{B}}_\tau \boldsymbol{\beta}_\tau + \boldsymbol{z}_\tau, \qquad \text{independent } \boldsymbol{z}_\tau \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, v_\tau \boldsymbol{I}_N).$$

$\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_\tau$を$\boldsymbol{\phi}_\tau$と同じ分離条件を満たすリプシッツ連続関数とする。
すべて$\tau' \le \tau$に対して、大システム極限において

$$\langle \partial_{\tau'} \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_\tau(\boldsymbol{B}_{\tau+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \widetilde{\boldsymbol{w}}) \rangle - \mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_{\tau+1}}\left[ \langle \partial_{\tau'} \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_\tau \left( \widetilde{\boldsymbol{B}}_{\tau+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \widetilde{\boldsymbol{w}} \right) \rangle \right] \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

$$\frac{1}{N} \boldsymbol{b}_{\tau'}^{\mathrm{T}} \left( \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_\tau(\boldsymbol{B}_{\tau+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \widetilde{\boldsymbol{w}}) - \sum_{t'=0}^{\tau} \langle \partial_{t'} \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_\tau(\boldsymbol{B}_{\tau+1}, \boldsymbol{\Lambda}, \widetilde{\boldsymbol{w}}) \rangle \boldsymbol{b}_{t'} \right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

# 定理6.2の続き

(B1) 条件$\mathcal{E}_{\tau,\tau+1}$の下で、

$$\boldsymbol{h}_\tau \sim \boldsymbol{H}_\tau \boldsymbol{\alpha}_\tau + \boldsymbol{H}_\tau \boldsymbol{o}(1) + \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\tau+1}\boldsymbol{o}(1) + \boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\tau+1},\boldsymbol{H}_\tau)} \widetilde{\boldsymbol{V}} \left(\boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\boldsymbol{B}_{\tau+1},\widetilde{\boldsymbol{M}}_\tau)}\right)^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{m}}_\tau.$$

$\widetilde{\boldsymbol{V}} \in \mathcal{O}_{N-2\tau-1}$は$\mathcal{E}_{\tau,\tau+1}$の条件下でハール直交行列である。

(B2) $\tilde{v}_\tau = \lim_{M=\delta N\to\infty} N^{-1}\|\widetilde{\boldsymbol{m}}_\tau^{\perp}\|^2$として、$\{\widetilde{\boldsymbol{h}}_\tau\}$を逐次的に定義する。

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}_\tau = \widetilde{\boldsymbol{H}}_\tau \boldsymbol{\alpha}_\tau + \tilde{\mathbf{z}}_\tau, \qquad \text{independent } \tilde{\mathbf{z}}_\tau \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \tilde{v}_\tau \boldsymbol{I}_N).$$

$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\tau$を$\boldsymbol{\psi}_\tau$と同じ分離条件を満たすリプシッツ連続関数とする。
すべて$\tau' \le \tau$に対して、大システム極限において

$$\langle \partial_{\tau'} \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\tau(\boldsymbol{H}_{\tau+1}, \boldsymbol{x})\rangle - \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbf{Z}}_{\tau+1}}\left[\langle \partial_{\tau'} \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\tau\left(\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\tau+1}, \boldsymbol{x}\right)\rangle\right] \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{\tau'}^{\mathrm{T}}\left(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\tau(\boldsymbol{H}_{\tau+1}, \boldsymbol{x}) - \sum_{t'=0}^{\tau} \langle \partial_{t'} \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\tau(\boldsymbol{H}_{\tau+1}, \boldsymbol{x})\rangle \boldsymbol{h}_{t'}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

# 帰納法による定理6.2の証明手順

手順1

$\tau = 0$の場合に、性質(A1)、(A2)、(B1)、(B2)を証明する。

証明は省略

手順2

ある$t$に対して、すべての$\tau < t$に関して定理が成立すると仮定して、$\tau = t$の場合に性質(A1)、(A2)、(B1)、(B2)を証明する。

性質(A1)と(A2)のみを証明

Boltausenの方法[7-1]

反復$t$時点でのメッセージの全履歴$\mathcal{E}_{t,t}$に関する条件下で、ハール直交行列$\boldsymbol{V}$の事後分布を経由して、(A1)を証明する。

[7-1] E. Bolthausen, "An iterative construction of solutions of the TAP equations for the Sherrington-Kirkpatrick model," Commun. Math. Phys., vol. 325, no. 1, pp. 333–366, Jan. 2014.

# $\tau = t$に対する(A1)の証明

$\left(\widetilde{\boldsymbol{M}}_t, \boldsymbol{B}_t\right) = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t)$に補題6.1を適用すると、

$$\boldsymbol{b}_t = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{q}}_t \sim \left(\widetilde{\boldsymbol{M}}_t, \boldsymbol{B}_t\right)\left[\left(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t)\right]^{-1}\left(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t\right)^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{q}}_t$$

$$+\boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\widetilde{\boldsymbol{M}}_t, \boldsymbol{B}_t)}\widetilde{\boldsymbol{V}}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t)}\right)^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{q}}_t.$$

右辺第一項の評価

帰納法の仮定(B2)$N^{-1}\boldsymbol{h}_{\tau}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\tau'} \xrightarrow{\mathrm{a.s.}} 0\,(\tau < t, \tau' \leq t)$を使うと、

$$\left(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_t & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_t \end{bmatrix} + o(N).$$

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{M}}_t, \boldsymbol{B}_t\right)\left[\left(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t)\right]^{-1}\left(\boldsymbol{H}_t, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_t\right)^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{q}}_t$$

$$= \boldsymbol{B}_t\left(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_t^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_t\right)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_t^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{q}}_t + \boldsymbol{B}_t\boldsymbol{o}(1) + \widetilde{\boldsymbol{M}}_t o(1). \qquad \blacksquare$$

# $\tau = t$に対する(A2)前半の証明

帰納法の仮定(B2)$N^{-1}\boldsymbol{h}_\tau^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\tau'} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0\,(\tau < t, \tau' \leq t)$を使うと、

$$N^{-1}\left\|\boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\widetilde{\boldsymbol{M}}_t,\boldsymbol{B}_t)}\widetilde{\boldsymbol{V}}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\perp}_{(\boldsymbol{H}_t,\widetilde{\boldsymbol{Q}}_t)}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t\right\|^2 = N^{-1}\tilde{\boldsymbol{q}}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\perp}_{(\boldsymbol{H}_t,\widetilde{\boldsymbol{Q}}_t)}\tilde{\boldsymbol{q}}_t$$

$$= \frac{1}{N}\tilde{\boldsymbol{q}}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\perp}_{\widetilde{\boldsymbol{Q}}_t}\tilde{\boldsymbol{q}}_t + o(1) \xrightarrow{\text{a.s.}} v_t.$$

任意の有界リプシッツ連続関数$f$に対して、補題7.1を使用すると、

$$\langle f(\boldsymbol{B}_{t+1},\boldsymbol{\Lambda},\tilde{\boldsymbol{w}})\rangle = \mathbb{E}_{\boldsymbol{z}_t}\left[\langle f\left(\boldsymbol{B}_t,\tilde{\boldsymbol{b}}_t,\boldsymbol{\Lambda},\tilde{\boldsymbol{w}}\right)\rangle\right] + o(1)$$

$$= \mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_{t+1}}\left[\langle f\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{t+1},\boldsymbol{\Lambda},\tilde{\boldsymbol{w}}\right)\rangle\right] + o(1).$$

分布収束

補題7.2から、以下を得る。

$$\langle \partial_\tau\tilde{\boldsymbol{\phi}}_t(\boldsymbol{B}_{t+1},\boldsymbol{\Lambda},\tilde{\boldsymbol{w}})\rangle - \mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_{t+1}}\left[\langle \partial_\tau\tilde{\boldsymbol{\phi}}_t\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{t+1},\boldsymbol{\Lambda},\tilde{\boldsymbol{w}}\right)\rangle\right] \xrightarrow{a.s.} 0. \quad \blacksquare$$

# $\tau = t$に対する(A2)後半の証明

補題7.1を繰り返し使用すると、

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{b}_{\tau'}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_t(\boldsymbol{B}_{t+1},\boldsymbol{\Lambda},\widetilde{\boldsymbol{w}}) = \frac{1}{N}\mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_{t+1}}\left[\widetilde{\boldsymbol{b}}_{\tau'}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_t\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{t+1},\boldsymbol{\Lambda},\widetilde{\boldsymbol{w}}\right)\right] + o(1).$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_{t+1}}\left[\tilde{b}_{\tau',n}\tilde{\phi}_{t,n}\left(\tilde{b}_{0,n},\dots,\tilde{b}_{t,n},\lambda_n,\widetilde{w}_n\right)\right] + o(1).$$

補題6.2と(A1)前半を適用して、

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{\tau=0}^{t}\mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_{t+1}}\left[\tilde{b}_{\tau',1}\tilde{b}_{\tau,1}\right]\mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_{t+1}}\left[\partial_\tau\tilde{\phi}_{t,n}\left(\tilde{b}_{0,n},\dots,\tilde{b}_{t,n},\lambda_n,\widetilde{w}_n\right)\right] + o(1)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{t}\boldsymbol{b}_{\tau'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_\tau\left\langle\partial_\tau\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_t(\boldsymbol{B}_{t+1},\boldsymbol{\Lambda},\widetilde{\boldsymbol{w}})\right\rangle + o(1)\ \text{almost surely.} \qquad \blacksquare$$