メッセージ伝播法の入門から最先端まで
第8回講義資料
AMPの状態発展方程式

九州大学
令和元年10月23日

豊橋技術科学大学
電気・電子情報工学系
准教授　竹内啓悟

定理6.1前半の証明のスケッチ

$g_{t',t}^{(k)} = \langle \boldsymbol{\Lambda}^k \partial_{t'} \tilde{\boldsymbol{m}}_t \rangle$と定義する。

$g_{t',t}^{(0)} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$を$t$に関する数学的帰納法で証明する。

$t = 0$、$t = 1$の場合の証明

省略

帰納法による証明

すべての$0 \le t < \tau$、$0 \le t' \le t$に対して、$g_{t',t}^{(0)} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$となるような$1 < \tau < T$が存在すると仮定し、$g_{t',\tau}^{(0)} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$を証明する。

帰納法の仮定から、$t < \tau$の場合に一般化誤差モデルはAMPの誤差モデルを含むので、定理6.2からξ_tは定数とみなせる。

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

システムの簡単化

$\widetilde{m}_t$と$g_{t',t}^{(k)}$の定義式から、$t' < t-1$の場合に、

$$g_{t',t}^{(k)} = \xi_{t-1}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)g_{t',t-1}^{(k)} - \xi_{t-1}g_{t',t-1}^{(k+1)} - \frac{\xi_{t-1}\xi_{t-2}}{\delta}g_{t',t-2}^{(k)} + o(1).$$

$\{a_t\}$を$a_0 = 1$と$a_t = \xi_{t-1}a_{t-1}$を満たす数列とし、$g_{t',t}^{(k)} = a_t\tilde{g}_{t',t}^{(k)}$とおく。

$$\tilde{g}_{t',t}^{(k)} = \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\tilde{g}_{t',t-1}^{(k)} - \tilde{g}_{t',t-1}^{(k+1)} - \frac{1}{\delta}\tilde{g}_{t',t-2}^{(k)} + o(1).$$

$t' = t$、$t' = t-1$の場合に同じ議論を繰り返すと、

$$\tilde{g}_{t,t}^{(k)} = \mu_k - \mu_{k+1} + o(1), \qquad \mu_k = \lim_{M=\delta N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(\Lambda^k\right).$$

$$\tilde{g}_{t-1,t}^{(k)} = -\frac{\mu_{k+1}}{\delta} + \tilde{g}_{t-1,t-1}^{(k)} - \tilde{g}_{t-1,t-1}^{(k+1)} + o(1).$$

解の構造解析

簡略化されたシステムの解は、$\tilde{g}_{t',t}^{(k)} = g_{t-t'}^{(k)}$と書ける。

$$g_0^{(k)} = \mu_k - \mu_{k+1} + o(1),$$

$$g_1^{(k)} = -\frac{\mu_{k+1}}{\delta} + g_0^{(k)} - g_0^{(k+1)} + o(1),$$

$$g_t^{(k)} = \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) g_{t-1}^{(k)} - g_{t-1}^{(k+1)} - \frac{1}{\delta} g_{t-2}^{(k)} + o(1).$$

すべての$t \leq \tau < T$に対して、$g_t^{(0)} \xrightarrow{a.s.} 0$を証明すればよい。

性質

$g_t^{(k)}$は$t + k + 1$次までのモーメント$\{\mu_{k'}\}$のみに依存する。

⇨ $g_\tau^{(0)}$は$\tau + 1 \leq T$次までのモーメントのみに依存

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

母関数

定理6.1の仮定から、$\{\mu_k\}$はMP分布のモーメント系列に一致すると仮定して、一般性を失わない。

母関数

$$G(x,y)=\sum_{t=0}^{\infty}G_t(x)\,y^t,$$

$$G_t(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_t^{(k)}x^k-\frac{g_{t-1}^{(0)}}{x},\qquad g_{-1}^{(0)}=0.$$

すべての$t\le\tau$に対して$g_t^{(0)}\xrightarrow{a.s.}0$を証明するためには、帰納法の仮定$g_{t-1}^{(0)}\xrightarrow{\text{a.s.}}0$から、$\lim_{x\to 0}G_t(x)=0$を示せばよい。

母関数の評価

η 変換のべき級数表現$\eta(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k \mu_k$を使用すると、

$$G_0(x) = \eta(-x) - \frac{\eta(-x) - \mu_0}{x} + o(1), \qquad \mu_0 = 1,$$

$$G_1(x) = -\frac{\eta(-x) - 1}{\delta x} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) G_0(x) + o(1),$$

$$G_t(x) = \left(1 + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{x}\right) G_{t-1}(x) - \frac{G_{t-2}(x)}{\delta} + o(1).$$

したがって、

$$G(x,y) = G_0(x) + yG_1(x) + \left(1 + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{x}\right) y\{G(x,y) - G_0(x)\}$$
$$- \frac{y^2}{\delta} G(x,y) + o(1).$$

母関数の有理関数表現

前ページの代数方程式を解くと、

$$G(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}+o(1),$$

$$P(x,y)=(\delta x-\delta-xy)\eta(-x)+\delta,$$

$$Q(x,y)=\delta y+(y-\delta)(y-1)x.$$

性質１　$G(0,y)=0\ \text{ for } y\neq 0.$

$\because\quad Q(0,y)=\delta y\neq 0,\qquad P(0,y)=-\delta\eta(0)+\delta=0.$

性質２

$y\in(0,\min\{1,\delta\})$の場合に、$P(x,y)$は$Q(x,y)$で割り切れる。

性質１と性質２から、$\lim_{x\to 0}G_t(x)=0$

性質2の証明

$Q(-x^*, y) = 0$を満たす零点$-x^*$は唯一で、仮定$y \in (0, \min\{1, \delta\})$から右式を満たす。

$$x^* = \frac{\delta y}{(y-\delta)(y-1)} > 0.$$

零点$-x^*$において、$P(-x^*, y) = 0$を示せばよい。

MP分布の場合のη変換は以下の方程式を満たすので、

$$x^* \eta^2(x^*) + (\delta x^* - x^* + \delta)\eta(x^*) - \delta = 0$$

x^*の定義を代入して、$\left\{\eta(x^*) - \frac{y-\delta}{y}\right\}\{\eta(x^*) - (1-y)\} = 0.$

η変換は正なので、$\eta(x^*) = 1 - y$.

$P(x, y)$の定義から、$P(-x^*, y) = \delta\left\{1 - \frac{\eta(x^*)}{1-y}\right\} = 0.$ ■

定理6.1後半の証明

$$a_{\tau,t}^{(k)}=\frac{1}{N}\tilde{\boldsymbol{m}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\tilde{\boldsymbol{m}}_{t},\qquad b_{\tau,t}^{(k)}=\frac{1}{N}\boldsymbol{b}_{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\tilde{\boldsymbol{m}}_{t},\qquad c_{\tau,t}=\frac{1}{N}\boldsymbol{q}_{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_{t},$$

$$d_{\tau,t}=\frac{1}{N}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\tau}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{t},\qquad e_{t}^{(k)}=\frac{1}{N}\tilde{\boldsymbol{m}}_{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}.$$

大システム極限で、AMPの状態発展方程式を導出する。

$$a_{\tau,t}^{(k)}=(1+\delta^{-1})\xi_{t-1}a_{\tau,t-1}^{(k)}-\xi_{t-1}a_{\tau,t-1}^{(k+1)}-\frac{\xi_{t-1}\xi_{t-2}}{\delta}a_{\tau,t-2}^{(k)}$$
$$+b_{t,\tau}^{(k)}-b_{t,\tau}^{(k+1)}-\frac{\xi_{t-1}}{\delta}b_{t-1,\tau}^{(k)}+e_{\tau}^{(k)},$$

$$b_{\tau,t}^{(k)}=(1+\delta^{-1})\xi_{t-1}b_{\tau,t-1}^{(k)}-\xi_{t-1}b_{\tau,t-1}^{(k+1)}-\frac{\xi_{t-1}\xi_{t-2}}{\delta}b_{\tau,t-2}^{(k)}$$
$$+(\mu_{k}-\mu_{k+1})d_{\tau,t}-\frac{\xi_{t-1}}{\delta}\mu_{k}d_{\tau,t-1},$$

$$d_{\tau,t}=c_{\tau,t}-\xi_{\tau-1}\xi_{t-1}a_{\tau-1,t-1}^{(0)},$$

$$e_{\tau}^{(k)}=(1+\delta^{-1})\xi_{\tau-1}e_{\tau-1}^{(k)}-\xi_{\tau-1}e_{\tau-1}^{(k+1)}-\frac{\xi_{\tau-1}\xi_{\tau-2}}{\delta}e_{\tau-2}^{(k)}+\sigma^{2}\mu_{k+1}.$$

$a_{\tau,t}^{(k)}$の評価

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_t = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{b}_t + \xi_{t-1}\{(1+\delta^{-1})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda}\}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-1} + \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} - \frac{\xi_{t-1}}{\delta}(\boldsymbol{b}_{t-1} + \xi_{t-2}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-2}), \qquad \widetilde{\boldsymbol{m}}_t = \boldsymbol{b}_t = 0 \text{ for } t < 0.$$

$t < 0$に対して$a_{\tau,t}^{(k)} = b_{t,\tau}^{(k)} = 0$として、

$$\begin{aligned} a_{\tau,t}^{(k)} &= \frac{1}{N}\widetilde{\boldsymbol{m}}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{b}_t + \frac{\xi_{t-1}}{N}\widetilde{\boldsymbol{m}}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k\{(1+\delta^{-1})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda}\}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-1} \\ &\quad - \frac{\xi_{t-1}}{N\delta}\widetilde{\boldsymbol{m}}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{b}_{t-1} - \frac{\xi_{t-1}\xi_{t-2}}{N\delta}\widetilde{\boldsymbol{m}}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-2} + \frac{1}{N}\widetilde{\boldsymbol{m}}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \\ &= b_{t,\tau}^{(k)} - b_{t,\tau}^{(k+1)} + \xi_{t-1}\left\{(1+\delta^{-1})a_{\tau,t-1}^{(k)} - a_{\tau,t-1}^{(k+1)}\right\} \\ &\quad - \frac{\xi_{t-1}}{\delta}b_{t-1,\tau}^{(k)} - \frac{\xi_{t-1}\xi_{t-2}}{\delta}a_{\tau,t-2}^{(k)} + e_\tau^{(k)} + o(1). \end{aligned}$$

$b_{\tau,t}^{(k)}$の評価

定理6.2の性質(A2)を使うと 、$t<0$に対して$b_{\tau,t}^{(k)}=0$、$d_{\tau,t}^{(k)}=0$として、

$$
\begin{aligned}
b_{\tau,t}^{(k)} &= \frac{1}{N}\boldsymbol{b}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{b}_t + \frac{\xi_{t-1}}{N}\boldsymbol{b}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k\{(1+\delta^{-1})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}\}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-1} \\
&\quad -\frac{\xi_{t-1}}{\delta N}\boldsymbol{b}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{b}_{t-1} - \frac{\xi_{t-1}\xi_{t-2}}{\delta N}\boldsymbol{b}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k\widetilde{\boldsymbol{m}}_{t-2} + \frac{1}{N}\boldsymbol{b}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \\
&= (\mu_k-\mu_{k+1})d_{\tau,t} + \xi_{t-1}\left\{(1+\delta^{-1})b_{\tau,t-1}^{(k)} - b_{\tau,t-1}^{(k+1)}\right\} \\
&\quad -\frac{\xi_{t-1}}{\delta}\mu_k d_{\tau,t-1} - \frac{\xi_{t-1}\xi_{t-2}}{\delta}b_{\tau,t-2}^{(k)} + o(1).
\end{aligned}
$$

ただし、以下を使った。

$$
\frac{1}{N}\boldsymbol{b}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_t = \frac{1}{N}\widetilde{\boldsymbol{q}}_\tau^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{q}}_t = d_{\tau,t}.
$$

$d_{\tau,t}^{(k)}$の評価

$\tilde{\boldsymbol{q}}_t = \boldsymbol{q}_t - \xi_{t-1}\boldsymbol{h}_{t-1}$と定理6.2の性質(B2)を使って、

$$d_{\tau,t} = \frac{1}{N}\tilde{\boldsymbol{q}}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t = c_{\tau,t} - \frac{\xi_{\tau-1}}{N}\boldsymbol{h}_{\tau-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t$$

$$= c_{\tau,t} - \xi_{\tau-1}\xi_{t-1}a_{\tau-1,t-1}^{(0)} + o(1).$$

最後の等号は、以下のためである。

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{\tau-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t = \frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{\tau-1}^{\mathrm{T}}\eta_{t-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}_{t-1}) + o(1)$$

$$= \frac{\xi_{t-1}}{N}\boldsymbol{h}_{\tau-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{t-1} + o(1) = \xi_{t-1}a_{\tau-1,t-1}^{(0)} + o(1).$$

2番目の等号は、定理6.2の性質(B2)から従う。

$e_{\tau}^{(k)}$の評価

大数の強法則から

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = \frac{1}{N}\mathbb{E}_{\boldsymbol{w}}\left[\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\right)\right] + o(1).$$

$$= \frac{\sigma^2}{N}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\Lambda}^{k+1}\right) + o(1) = \sigma^2\mu_{k+1} + o(1).$$

したがって、

$$e_{\tau}^{(k)} = \frac{1}{N}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{\tau}$$

$$= \frac{1}{N}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}^{k}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{b}_{\tau} + \frac{\xi_{\tau-1}}{N}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\{(1+\delta^{-1})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}\}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{\tau-1}$$

$$-\frac{\xi_{\tau-1}}{N\delta}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\boldsymbol{b}_{\tau-1} - \frac{\xi_{\tau-1}\xi_{\tau-2}}{N\delta}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{\tau-2} + \sigma^2\mu_{k+1} + o(1).$$

$$= (1+\delta^{-1})\xi_{\tau-1}e_{\tau-1}^{(k)} - \xi_{\tau-1}e_{\tau-1}^{(k+1)} - \frac{\xi_{\tau-1}\xi_{\tau-2}}{\delta}e_{\tau-2}^{(k)} + \sigma^2\mu_{k+1} + o(1).$$

AMP状態発展方程式の簡略化

状態発展方程式から、$\{\xi_\tau\}$を消去する。

変数変換

$$x_{\tau,t}^{(k)} = \tilde{x}_{\tau,t}^{(k)} \prod_{\tau'=0}^{\tau-1} \xi_{\tau'} \prod_{t'=0}^{t-1} \xi_{t'}, \qquad x = a, b, c, d,$$

$$\tilde{e}_{\tau,t}^{(k)} = \frac{e_\tau^{(k)}}{\prod_{\tau'=0}^{\tau-1} \xi_{\tau'} \prod_{t'=0}^{t-1} \xi_{t'}},$$

$$\tilde{\sigma}_{\tau,t}^2 = \frac{\sigma^2}{\prod_{\tau'=0}^{\tau-1} \xi_{\tau'} \prod_{t'=0}^{t-1} \xi_{t'}},$$

ただし、$\prod_{t'=0}^{-1} \xi_{t'} = 1$と定義する。

簡略化されたAMP状態発展方程式

$$\tilde{a}_{\tau,t}^{(k)} = (1+\delta^{-1})\tilde{a}_{\tau,t-1}^{(k)} - \tilde{a}_{\tau,t-1}^{(k+1)} - \delta^{-1}\tilde{a}_{\tau,t-2}^{(k)}$$

$$+\tilde{b}_{t,\tau}^{(k)} - \tilde{b}_{t,\tau}^{(k+1)} - \delta\tilde{b}_{t-1,\tau}^{(k)} + \tilde{e}_{\tau,t}^{(k)},$$

$$\tilde{b}_{\tau,t}^{(k)} = (1+\delta^{-1})\tilde{b}_{\tau,t-1}^{(k)} - \tilde{b}_{\tau,t-1}^{(k+1)} - \delta^{-1}\tilde{b}_{\tau,t-2}^{(k)}$$

$$+(\mu_k - \mu_{k+1})\tilde{d}_{\tau,t} - \delta^{-1}\mu_k\tilde{d}_{\tau,t-1},$$

$$\tilde{d}_{\tau,t} = \tilde{c}_{\tau,t} - \tilde{a}_{\tau-1,t-1}^{(0)},$$

$$\tilde{e}_{\tau,t}^{(k)} = (1+\delta^{-1})\tilde{e}_{\tau-1,t}^{(k)} - \tilde{e}_{\tau-1,t}^{(k+1)} - \delta^{-1}\tilde{e}_{\tau-2,t}^{(k)} + \mu_{k+1}\tilde{\sigma}_{\tau,t}^2.$$

添え字が負の場合の変数は、すべて0と定義する。

$\tilde{a}_{\tau,t}^{(k)}$と$\tilde{b}_{\tau,t}^{(k)}$はそれぞれ$(t+k+2)$次と$(t+k+1)$次までのモーメント$\{\mu_{k'}\}$のみに依存する。

TOYOHASHI
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

母関数

$g = a, b, c, d, e, \sigma^2$に対して、

$$G(y,z) = \sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} y^{\tau} z^{t} \tilde{g}_{\tau,t}, \quad G(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} x^{k} y^{\tau} z^{t} \tilde{g}_{\tau,t}^{(k)}.$$

母関数が満たす代数方程式

$$A(x,y,z) = \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) zA(x,y,z) - \frac{z}{x}\{A(x,y,z) - A(y,z)\}$$
$$- \frac{z^2}{\delta} A(x,y,z) + \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{z}{\delta}\right) B(x,z,y) + E(x,y,z),$$

ただし、 $A(y,z) = \lim_{x \to 0} A(x,y,z).$

母関数が満たす代数方程式

定理6.1の仮定から、$\{\mu_k\}$はMP分布のモーメント系列に一致すると仮定して、一般性を失わない。

定理6.1前半から得られる$\lim_{x\to 0} B(x,y,z) = 0$を使うと、

$$
\begin{aligned}
B(x,y,z) = {} & \left(1+\frac{1}{\delta}\right) zB(x,y,z) - \frac{z}{x} B(x,y,z) - \frac{z^2}{\delta} B(x,y,z) \\
& + \left\{\eta(-x) - \frac{1}{x}[\eta(-x)-1] - \frac{z\eta(-x)}{\delta}\right\} D(y,z),
\end{aligned}
$$

$$
D(y,z) = C(y,z) - yzA(y,z),
$$

$$
\begin{aligned}
E(x,y,z) = {} & \left(1+\frac{1}{\delta}\right) yE(x,y,z) - \frac{y}{x}\{E(x,y,z) - E(y,z)\} \\
& - \frac{y^2}{\delta} E(x,y,z) + \frac{\Sigma^2(y,z)}{x}\{\eta(-x) - 1\}.
\end{aligned}
$$

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

母関数が満たす代数方程式

$D(z,y)=D(y,z)$を使用すると、

$$A(x,y,z)=\frac{\delta zA(y,z)+(\delta x-\delta-xz)B(x,z,y)+\delta xE(x,y,z)}{\delta z+(z-\delta)(z-1)x},$$

$$B(x,z,y)=\frac{\delta x\eta(-x)-\delta[\eta(-x)-1]-xy\eta(-x)}{\delta y+(y-\delta)(y-1)x}D(y,z),$$

$$D(y,z)=C(y,z)-yzA(y,z).$$

$$E(x,y,z)=\frac{\delta yE(y,z)+\delta\Sigma^2(y,z)\{\eta(-x)-1\}}{\delta y+(y-\delta)(y-1)x}.$$

以下の関係式を証明する。

$$A(y,z)=\Sigma^2(y,z)+\frac{1}{\delta}C(y,z).$$

母関数の評価

$A(x,y,z)$は解析的なので、$A(x,y,z)$の分母$Q(x,y,z)$が0のとき、分子$P(x,y,z)$も0にならなければならない。

$$Q(-x^*,y,z)=0. \iff x^*=\frac{\delta z}{(z-\delta)(z-1)}.$$

$P(-x^*,y,z)=0$より、

$$A(y,z)=-\frac{B(-x^*,z,y)}{z(z-1)}+\frac{\delta E(-x^*,y,z)}{(z-\delta)(z-1)}.$$

定理6.1の証明で示した$\eta(-x^*)=1-z$を使うと、

$$B(-x^*,z,y)=\frac{z(z-1)}{yz-\delta}\{C(y,z)-yzA(y,z)\}.$$

$$E(-x^*,y,z)=\frac{(z-\delta)(z-1)\{yE(y,z)-z\Sigma^2(y,z)\}}{(yz-\delta)(z-y)}.$$

母関数の評価

$E(x,y,z)$は解析的なので、$E(x,y,z)$の分母が0のとき、分子も0にならなければならない。

$x^{**} = \delta y/(y-\delta)(y-1)$とすると、$\eta(x^{**}) = 1-y$なので、

$$E(y,z) = \Sigma^2(y,z).$$

したがって、

$$E(-x^*,y,z) = -\frac{(z-\delta)(z-1)}{yz-\delta}\Sigma^2(y,z).$$

以上の結果をまとめると、 $A(y,z) = \Sigma^2(y,z) + \dfrac{1}{\delta}C(y,z).$

定理6.2後半の証明

定義から、大システム極限で以下を証明した。

$$\frac{1}{N}\|\tilde{\boldsymbol{m}}_t\|^2 = \sigma^2 + \frac{1}{\delta N}\|\boldsymbol{q}_t\|^2 + o(1).$$

定理6.2の性質(B2)から

$$\frac{1}{N}\|\boldsymbol{q}_{t+1}\|^2 = \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\left\|\eta_t\left(\boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{h}}_t\right) - \boldsymbol{x}\right\|^2\right] + o(1).$$

$\tilde{\boldsymbol{h}}_t$は$\mathbb{E}\left[\tilde{\boldsymbol{h}}_t\tilde{\boldsymbol{h}}_t^{\mathrm{T}}\right] = N^{-1}\|\tilde{\boldsymbol{m}}_t\|^2\boldsymbol{I}_N$を満たす平均0のガウス分布に従う。

これは発見的に導出されたAMPの状態発展方程式が正しいことを意味している。