

# メッセージ伝播法入門

## 第2回講義資料

### ベイズ最適な近似的メッセージ伝播法

広島市立大学  
令和5年9月25日～9月26日

豊橋技術科学大学  
電気・電子情報工学系  
准教授 竹内啓悟

# スカラー-AWGN観測モデル

$$\bar{x}_n = x_n + \omega_n, \quad \omega_n \sim \mathcal{N}(0, \nu).$$

事後平均

$$\eta(\bar{x}_n; \nu) = \mathbb{E}[x_n | \bar{x}_n, \nu].$$

最小平均二乗誤差 (MMSE)

$$\text{MMSE}(\nu) = \mathbb{E}[\{x_n - \eta(\bar{x}_n; \nu)\}^2].$$

恒等式

$$\eta'(\bar{x}_n; \nu) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \eta(\bar{x}_n; \nu) = \frac{\mathbb{E}[\{x_n - \eta(\bar{x}_n; \nu)\}^2 | \bar{x}_n]}{\nu}.$$

# 恒等式の証明

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} p(\bar{x}_n | x_n) = \frac{x_n - \bar{x}_n}{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(\bar{x}_n - x_n)^2}{2v}} \text{ を使って直接計算する。}$$

$$\begin{aligned} \eta'(\bar{x}_n; v) &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \frac{\int x_n p(\bar{x}_n | x_n) p(x_n) dx_n}{\int p(\bar{x}_n | x_n) p(x_n) dx_n} \\ &= \frac{\int x_n (x_n - \bar{x}_n) p(\bar{x}_n | x_n) p(x_n) dx_n}{v \int p(\bar{x}_n | x_n) p(x_n) dx_n} \\ &= \frac{\int x_n p(\bar{x}_n | x_n) p(x_n) dx_n \int (x_n - \bar{x}_n) p(\bar{x}_n | x_n) p(x_n) dx_n}{v \left\{ \int p(\bar{x}_n | x_n) p(x_n) dx_n \right\}^2} \\ &= \frac{1}{v} \frac{\int x_n^2 p(\bar{x}_n | x_n) p(x_n) dx_n}{\int p(\bar{x}_n | x_n) p(x_n) dx_n} - \frac{\eta^2(\bar{x}_n; v)}{v} = \frac{\mathbb{E}[\{x_n - \eta(\bar{x}_n; v)\}^2 | \bar{x}_n]}{v}. \end{aligned}$$

# ベイズ最適AMP[2-1]

更新式

$$\mathbf{z}^t = \mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}^t + \frac{\langle \eta'(\hat{\mathbf{x}}^{t-1} + A^T \mathbf{z}^{t-1}; v^{t-1}) \rangle}{\delta} \mathbf{z}^{t-1},$$

$$v^t = \sigma^2 + \frac{1}{\delta} \text{MMSE}(v^{t-1}),$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{t+1} = \eta(\hat{\mathbf{x}}^t + A^T \mathbf{z}^t; v^t).$$

初期値  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z}^{-1} = \mathbf{0}$ ,  $\text{MMSE}(v^{-1}) = 1$ .

表記 スカラー関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、

$$[f(\mathbf{x})]_n = f(x_n), \quad \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n).$$

[2-1] Y. Kabashima, "A CDMA multiuser detection algorithm on the basis of belief propagation," *J. Phys. A, Math. General*, vol. 36, no. 43, pp. 11111–11121, Oct. 2003.

# ベイズ最適AMPの別表現

## 更新式

$$\mathbf{z}^t = \mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}^t + \frac{\text{MMSE}(v^{t-1})}{\delta v^{t-1}} \mathbf{z}^{t-1},$$

$$v^t = \sigma^2 + \frac{1}{\delta} \text{MMSE}(v^{t-1}),$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{t+1} = \eta(\hat{\mathbf{x}}^t + A^T \mathbf{z}^t; v^t).$$

## 初期値

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}^{-1} = \mathbf{0}, \quad \text{MMSE}(v^{-1}) = 1.$$

反復当たりの計算量は $O(MN)$ である。

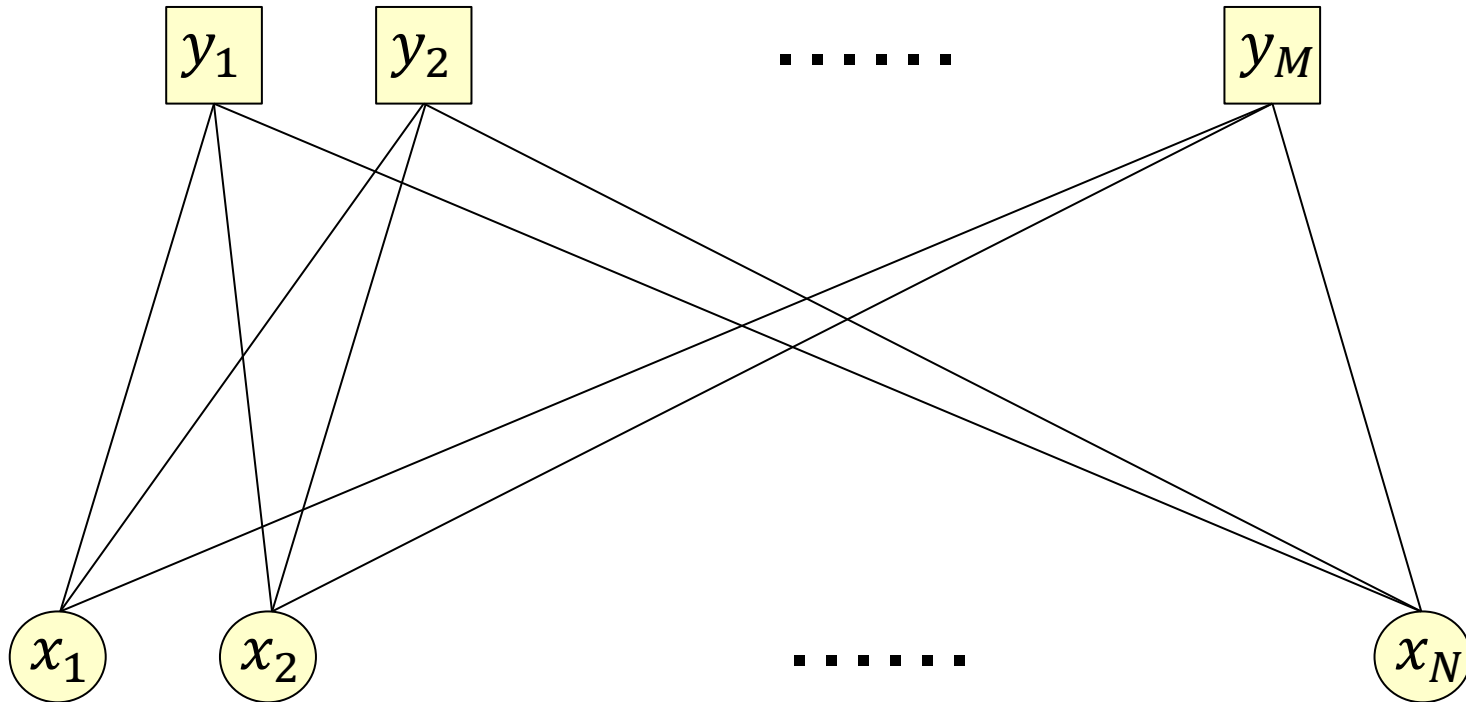
# 導出の概要[2-1]

1. 推定問題を**ファクターグラフ**で表現し、**確率伝播法(BP)**に基づく反復アルゴリズムを定式化する。
2. 大システム極限で誤差が生じないように、**干渉成分のガウス近似**を行い、反復アルゴリズムの計算量を削減する。
3. 大システム極限で誤差が生じないように、**メッセージの添え字を減らす**近似を行う。

# ファクターグラフ

$$y_m = \sum_{n=1}^N A_{mn}x_n + w_m$$

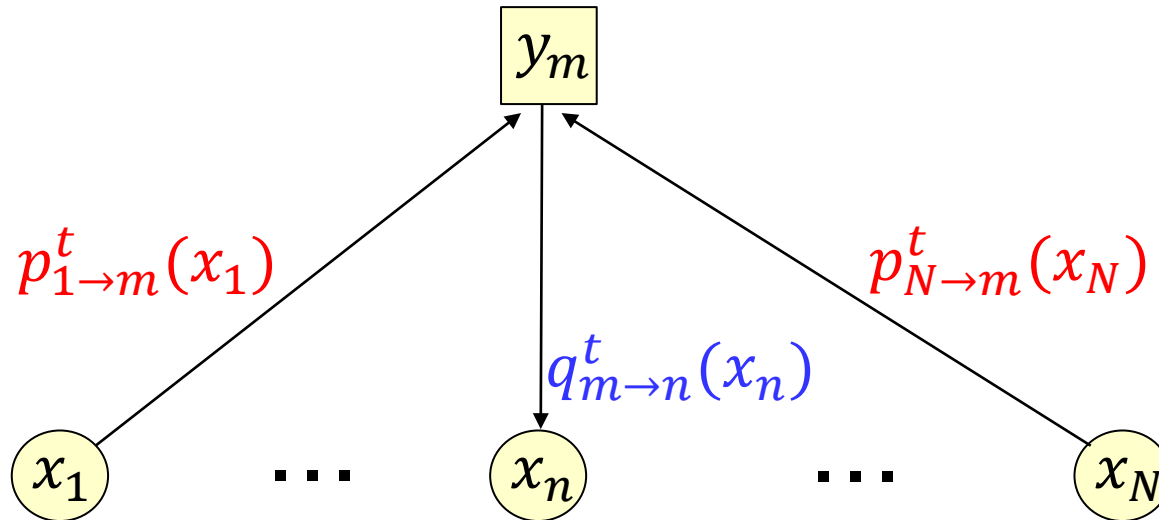
ファクターノード



変数ノード

# 確率伝播法 (BP)

ファクターノード  $y_m$  から変数ノード  $x_n$  へのメッセージ



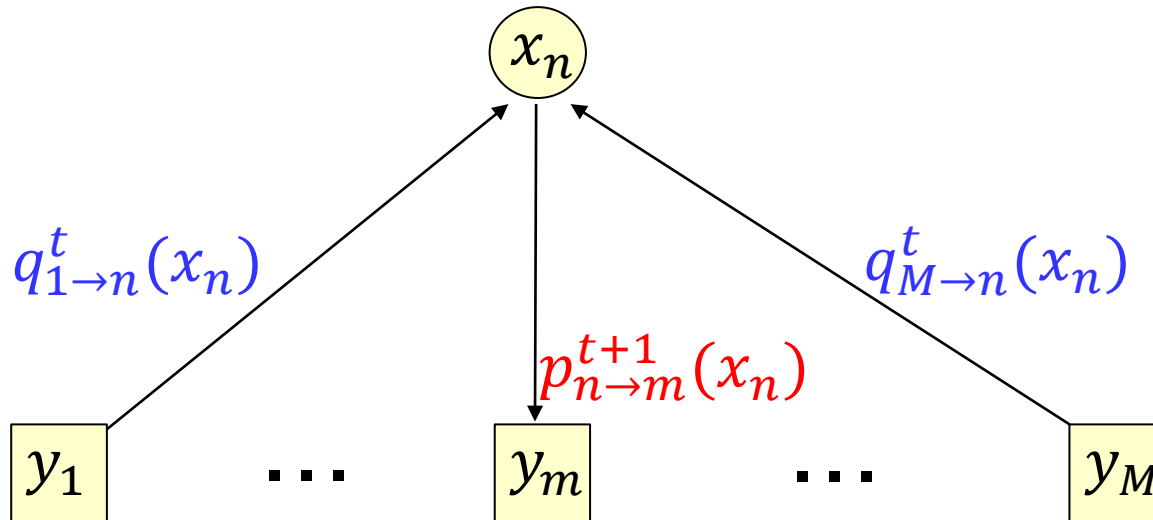
$$q_{m \rightarrow n}^t(x_n) = \int p(y_m | \mathbf{A}, \mathbf{x}) \prod_{n' \neq n} p_{n' \rightarrow m}^t(x_{n'}) d\mathbf{x}_{\setminus n}.$$

$t$ : 反復回数



# 確率伝播法 (BP)

変数ノード  $x_n$  からファクターノード  $y_m$  へのメッセージ

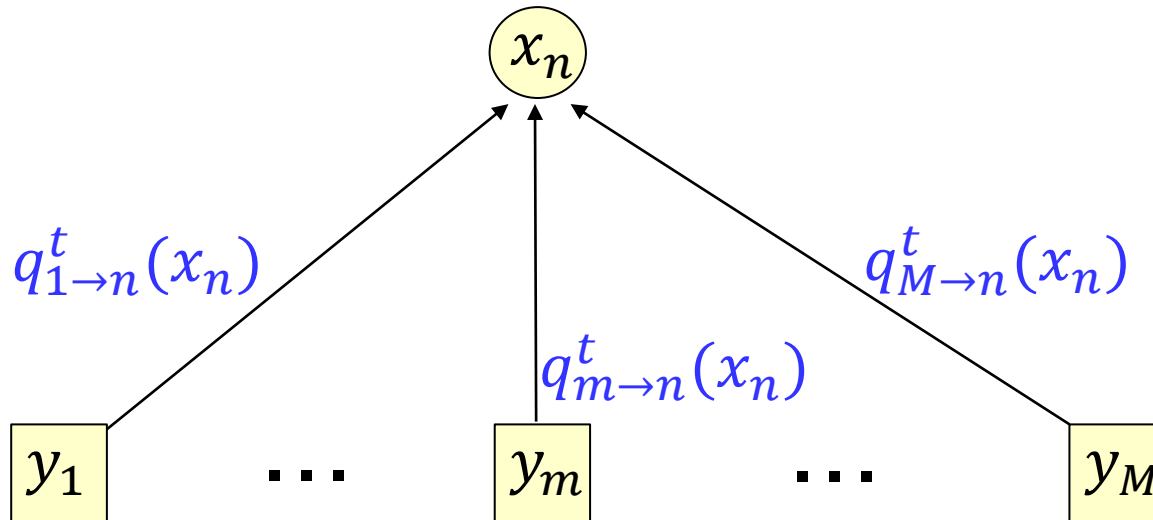


$$p_{n \to m}^{t+1}(x_n) \propto p(x_n) \prod_{m' \neq m} q_{m' \to n}^t(x_n).$$

$t$ : 反復回数

# 確率伝播法 (BP)

周辺事後分布  $p(x_n | A, \mathbf{y})$  の近似



$$p(x_n | A, \mathbf{y}) \approx p_n^{t+1}(x_n) \propto p(x_n) \prod_{m=1}^M q_{m \rightarrow n}^t(x_n).$$

$t$ : 反復回数

# BPの性質

## ファクターグラフが木の場合[2-2]

BPは真の周辺事後分布を計算できる。

## ファクターグラフが疎の場合[2-3, 2-4]

BPは収束する。

## その他の場合

BPの収束性は保証されない。

[2-2] J. Pearl, *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*, San Francisco, CA, USA, Morgan Kaufmann, 1988.

[2-3] M. G. Luby, M. M. Mitzenmacher, M. A. Shokrollari, and D. A. Spielman, "Improved low-density parity-check codes using irregular graphs," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 585-598, Feb. 2001.

[2-4] T. J. Richardson and R. L. Urbanke, "The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 599-618, Feb. 2001.

# 干渉のガウス近似

$$y_m = A_{mn}x_n + \sum_{n' \neq n} A_{mn'}x_{n'} + w_m$$

$$= I_{mn}^t$$

$I_{mn}^t$  の平均

$$\bar{I}_{mn}^t = \sum_{n' \neq n} A_{mn'} \hat{x}_{n' \rightarrow m}^t$$

$I_{mn}^t$  の分散

$$v_{mn}^t = \sigma^2 + \sum_{n' \neq n} A_{mn'}^2 \xi_{n' \rightarrow m}^t$$

メッセージに関する  $x_n$  の平均と分散

$$\hat{x}_{n \rightarrow m}^t = \int x p_{n \rightarrow m}^t(x) dx, \quad \xi_{n \rightarrow m}^t = \int (x - \hat{x}_{n \rightarrow m}^t)^2 p_{n \rightarrow m}^t(x) dx.$$

中心極限定理

大システム極限で、 $I_{mn}^t$  の分布は  $\mathcal{N}(\bar{I}_{mn}^t, v_{mn}^t)$  に収束する。

# メッセージの評価

ファクターノード $y_m$ から変数ノード $x_n$ へのメッセージ

$$q_{m \rightarrow n}^t(x_n) = \int p(y_m | A_{mn}x_n, I_{mn}^t) \prod_{n' \neq n} p_{n' \rightarrow m}^t(x_{n'}) dx_{\setminus n}.$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi v_{mn}^t}} e^{-\frac{(y_m - \bar{I}_{mn}^t - A_{mn}x_n)^2}{2v_{mn}^t}}.$$

変数ノード $x_n$ からファクターノード $y_m$ へのメッセージ

$$p_{n \rightarrow m}^{t+1}(x_n) \propto p(x_n) \prod_{m' \neq m} q_{m' \rightarrow n}^t(x_n) \propto p(x_n) \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t}} e^{-\frac{(\bar{x}_{n \rightarrow m}^t - x_n)^2}{2\bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t}}.$$
$$\bar{x}_{n \rightarrow m}^t = \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t \sum_{m' \neq m} \frac{A_{m'n}(y_{m'} - \bar{I}_{m'n}^t)}{v_{m'n}^t}, \quad \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t = \left( \sum_{m' \neq m} \frac{A_{m'n}^2}{v_{m'n}^t} \right)^{-1}.$$

# 確率論的な解釈

## 仮想的なAWGN観測モデル

$$\bar{x}_{n \rightarrow m}^t = x_n + \omega_{n \rightarrow m}^t, \quad \omega_{n \rightarrow m}^t \sim \mathcal{N}(0, \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t).$$

## $x_n$ の事後分布

$$p(x_n | \bar{x}_{n \rightarrow m}^t, \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t) = \frac{p(x_n) p(\bar{x}_{n \rightarrow m}^t | x_n, \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t)}{\int p(x_n) p(\bar{x}_{n \rightarrow m}^t | x_n, \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t) dx_n} \\ \propto p(x_n) p(\bar{x}_{n \rightarrow m}^t | x_n, \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t).$$

ただし、

$$p(\bar{x}_{n \rightarrow m}^t | x_n, \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t}} e^{-\frac{(\bar{x}_{n \rightarrow m}^t - x_n)^2}{2\bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t}}.$$

## 解釈

$p_{n \rightarrow m}^{t+1}(x_n)$ はAWGN観測モデルに基づく $x_n$ の事後分布である。

$$p_{n \rightarrow m}^{t+1}(x_n) \propto p(x_n | \bar{x}_{n \rightarrow m}^t, \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t).$$

# 近似的BP

$z_{mn}^t = y_m - \bar{l}_{mn}^t$ とおくと、

## 整合フィルタ

$$\bar{x}_{n \rightarrow m}^t = \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t \sum_{m' \neq m} \frac{A_{m'n} z_{m'n}^t}{v_{m'n}^t}, \quad \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t = \left( \sum_{m' \neq m} \frac{A_{m'n}^2}{v_{m'n}^t} \right)^{-1}.$$

$$z_{mn}^t = y_m - \sum_{n' \neq n} A_{mn'} \hat{x}_{n' \rightarrow m}^t, \quad v_{mn}^t = \sigma^2 + \sum_{n' \neq n} A_{mn'}^2 \xi_{n' \rightarrow m}^t.$$

## 非線形処理

$$\hat{x}_{n \rightarrow m}^{t+1} = \int x p(x_n | \bar{x}_{n \rightarrow m}^t, \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t) dx \equiv \eta(\bar{x}_{n \rightarrow m}^t; \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t),$$

$$\xi_{n \rightarrow m}^{t+1} = \int (x - \hat{x}_{n \rightarrow m}^{t+1})^2 p(x_n | \bar{x}_{n \rightarrow m}^t, \bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t) dx.$$

# 添え字の削減：二次モーメント

$\xi_{n \rightarrow m}^t$  が添え字  $m$  に寄らないことを仮定する。

$A_{mn} \sim \mathcal{N}(0, 1/M)$  i.i.d. なので、大数の弱法則を使って

$$v_{mn}^t = \sigma^2 + \sum_{n' \neq n} A_{mn'}^2 \xi_{n' \rightarrow m}^t \rightarrow \sigma^2 + \frac{1}{\delta} \zeta^t \equiv v^t,$$

$$\zeta^t = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n^t, \quad \xi_{n \rightarrow m}^t \rightarrow \xi_n^t.$$

## 整合フィルタ

$$\bar{\xi}_{n \rightarrow m}^t = \left( \sum_{m' \neq m} \frac{A_{m'n}^2}{v_{m'n}^t} \right)^{-1} \rightarrow v^t, \quad \bar{x}_{n \rightarrow m}^t \rightarrow \sum_{m' \neq m} A_{m'n} Z_{m'n}^t.$$



# 添え字の削減：一次モーメント

$$z_m^t = y_m - \sum_{n=1}^N A_{mn} \hat{x}_{n \rightarrow m}^t, \quad \bar{x}_n^t = \sum_{m=1}^M A_{mn} z_{mn}^t$$

を定義すると、以下を得る。

$$z_{mn}^t = z_m^t + A_{mn} \hat{x}_{n \rightarrow m}^t, \quad \bar{x}_{n \rightarrow m}^t = \bar{x}_n^t - A_{mn} z_{mn}^t.$$

$O(M^{-1/2})$ まで正確に計算すると、

$$\bar{x}_{n \rightarrow m}^t \approx \bar{x}_n^t - A_{mn} z_m^t.$$

## 一次のテーラー展開

$$\hat{x}_{n \rightarrow m}^{t+1} \rightarrow \eta(\bar{x}_{n \rightarrow m}^t; v^t) \approx \hat{x}_n^{t+1} - \eta'(\bar{x}_n^t; v^t) A_{mn} z_m^t,$$

$$\hat{x}_n^{t+1} = \eta(\bar{x}_n^t; v^t).$$

同様にして、 $z_{mn}^t \approx z_m^t + A_{mn} \hat{x}_n^t.$

# 添え字の削減：一次モーメント

$\bar{x}_n^t$  の評価

$$\bar{x}_n^t = \sum_{m=1}^M A_{mn} z_m^t \approx \sum_{m=1}^M A_{mn} (z_m^t + A_{mn} \hat{x}_n^t) \rightarrow \hat{x}_n^t + \sum_{m=1}^M A_{mn} z_m^t.$$

$z_m^t$  の評価

$$\begin{aligned} z_m^t &= y_m - \sum_{n=1}^N A_{mn} \hat{x}_{n \rightarrow m}^t \\ &\approx y_m - \sum_{n=1}^N A_{mn} \{ \hat{x}_n^t - \eta'(\bar{x}_n^{t-1}; v^{t-1}) A_{mn} z_m^{t-1} \} \\ &\rightarrow y_m - \sum_{n=1}^N A_{mn} \hat{x}_n^t + \frac{z_m^{t-1}}{\delta N} \sum_{n=1}^N \eta'(\bar{x}_n^{t-1}; v^{t-1}). \end{aligned}$$

# 添え字の削減：二次モーメント

$\xi_{n \rightarrow m}^{t+1}$  が添え字  $m$  に寄らないことの確認

$$\xi_{n \rightarrow m}^{t+1} \rightarrow \int (x - \hat{x}_n^{t+1})^2 p(x_n | \bar{x}_n^t, v^t) dx \equiv \xi_n^{t+1}.$$

$v^{t+1}$  の評価

$$v^{t+1} = \sigma^2 + \frac{1}{\delta N} \sum_{n=1}^N \xi_{n \rightarrow m}^{t+1} \rightarrow \sigma^2 + \frac{1}{\delta} \text{MMSE}(v^t).$$

注意

厳密な証明は、 $t$  に関する帰納法による。