メッセージ伝播法入門
第6回講義資料
状態発展法：厳密なアプローチ2

広島市立大学
令和５年９月25日～９月26日

豊橋技術科学大学
電気・電子情報工学系
准教授　竹内啓悟

主定理[3-3,3-4]

大システム極限で、以下が成り立つ。

（A1） $\boldsymbol{b}_t \sim \boldsymbol{B}_t \boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{A},t}, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{A},t} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, M^{-1} \|\boldsymbol{q}_t^{\perp}\|^2 \boldsymbol{I}_M).$

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{Q}_t^{\dagger} \boldsymbol{q}_t = (\beta_0, \dots, \beta_{t-1})^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{q}_t^{\perp} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp} \boldsymbol{q}_t.$$

（A2） $\dfrac{1}{M} \boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}_t - \dfrac{1}{\delta N} \boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_t \to 0.$

（A3） $\dfrac{1}{M} \boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m}_t - \dfrac{1}{\delta N} \boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_t \to 0.$

（B1） $\boldsymbol{h}_t \sim \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B},t}, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B},t} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, M^{-1} \|\boldsymbol{m}_t^{\perp}\|^2 \boldsymbol{I}_N).$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \boldsymbol{M}_t^{\dagger} \boldsymbol{m}_t = (\alpha_0, \dots, \alpha_{t-1})^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{m}_t^{\perp} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp} \boldsymbol{m}_t.$$

（B2） $\dfrac{1}{N} \boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_t - \dfrac{1}{M} \boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m}_t \to 0,$

（B3） $\dfrac{1}{N} \boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_{t+1} - \dfrac{\xi_{\mathrm{in},t}}{M} \boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m}_t \to 0.$

状態発展方程式の導出

性質(A1)と(B1)から、誤差$\boldsymbol{b}_t$と$\boldsymbol{h}_t$は平均ゼロのガウス分布に従うi.i.d.成分からなることが言える。

$N^{-1}\boldsymbol{h}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_t$を評価する。性質(B2)(A2)と大数の強法則を使って、

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_t \to \frac{1}{M}\boldsymbol{m}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t \to \frac{\mathbb{E}\left[\eta_{\mathrm{out},t}^2(Z_t, f(Z,W))\right]}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}^2} \equiv \mathbb{E}[H_t^2],$$

ただし、
$$Z_t = \frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}Z + B_t, \quad Z = -\frac{\bar{\xi}_{\mathrm{out},0}}{\bar{\zeta}_0}B_0,$$

$$\mathbb{E}[B_{t'}B_t] = \frac{1}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_t \to \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t.$$

$\{Z, Z_t\}$の共分散を評価する。

$$\mathbb{E}[Z^2] = \left(\frac{\bar{\xi}_{\mathrm{out},0}}{\bar{\zeta}_0}\right)^2 \mathbb{E}[B_0^2] \to \frac{1}{\delta N}\left(\frac{\bar{\xi}_{\mathrm{out},0}}{\bar{\zeta}_0}\right)^2 \boldsymbol{q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_0 \to \frac{1}{\delta}\,\mathbb{E}[X^2]$$

状態発展方程式の導出

$$\mathbb{E}[ZZ_{t+1}] = \mathbb{E}\left[Z\left(\frac{\bar{\zeta}_{t+1}}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t+1}}Z + B_{t+1}\right)\right]$$

$$\to \frac{\bar{\zeta}_{t+1}}{\delta\bar{\xi}_{\mathrm{out},t+1}}\mathbb{E}[X^2] - \frac{1}{\delta N}\frac{\bar{\xi}_{\mathrm{out},0}}{\bar{\zeta}_0}\boldsymbol{q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_{t+1} \to \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left[X\eta_{\mathrm{in},t}\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}X + H_t\right)\right],$$

$$\mathbb{E}[Z_{t+1}^2] = \mathbb{E}\left[Z_{t+1}\left(\frac{\bar{\zeta}_{t+1}}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t+1}}Z + B_{t+1}\right)\right]$$

$$= \frac{\bar{\zeta}_{t+1}}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t+1}}\mathbb{E}[ZZ_{t+1}] + \frac{\bar{\zeta}_{t+1}}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t+1}}\mathbb{E}[ZB_{t+1}] + \mathbb{E}[B_{t+1}^2]$$

$$\to \frac{\bar{\zeta}_{t+1}}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t+1}}\mathbb{E}[ZZ_{t+1}] + \frac{\bar{\zeta}_{t+1}}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t+1}}\mathbb{E}\left[Z\left(Z_{t+1} - \frac{\bar{\zeta}_{t+1}}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t+1}}Z\right)\right] + \frac{\|\boldsymbol{q}_{t+1}\|^2}{\delta N}$$

$$\to \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left[\eta_{\mathrm{in},t}^2\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}X + H_t\right)\right]. \qquad \blacksquare$$

主定理の証明の流れ

数学的帰納法によって、証明する。

$t=\tau$に対する(A1)〜(A3)

仮定

$t<\tau$に対する(A1)〜(A3)、
$t<\tau$に対する(B1)〜(B3)

証明

- (B3)→(A1)
- (A1)→(A2)
- (A1)(A2)→(A3)

$t=\tau$に対する(B1)〜(B3)

仮定

$t\le\tau$に対する(A1)〜(A3)、
$t<\tau$に対する(B1)〜(B3)

証明

- (A3)→(B1)
- (B1)→(B2)
- (B1)(B2)→(B3)

性質(A1)の証明[3-3]

$\boldsymbol{b}_t$を更新する直前までの反復を固定する。

$$\boldsymbol{B}_t - (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{M}_{t-1}\boldsymbol{\Lambda}_{t-1}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_t, \qquad \boldsymbol{Q}_t - \boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_t.$$

上記の制約式の下で、補題5.1の前半を使うと、

$$\boldsymbol{A} \sim [\boldsymbol{B}_t - (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{M}_{t-1}\boldsymbol{\Lambda}_{t-1})]\boldsymbol{Q}_t^{\dagger} - \left(\boldsymbol{M}_t^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp} + \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}.$$

ただし、$\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp} = \boldsymbol{O}$を使った。

定義$\boldsymbol{b}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_t + \delta^{-1}\xi_{\mathrm{in},t-1}\boldsymbol{m}_{t-1}$に上記を代入して、

$$\boldsymbol{b}_t \sim [\boldsymbol{B}_t - (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{M}_{t-1}\boldsymbol{\Lambda}_{t-1})]\boldsymbol{\beta}_t - \left(\boldsymbol{M}_t^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t^{\perp} + \frac{\xi_{\mathrm{in},t-1}}{\delta}\boldsymbol{m}_{t-1}$$
$$+\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t.$$

性質(A1)の証明[3-3]

$\boldsymbol{G}_t = M^{-1}\boldsymbol{M}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_t$とし、$\boldsymbol{q}_t^{\perp} = \boldsymbol{q}_t - \boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{\beta}_t$を使って第二項を評価する。

$$\boldsymbol{M}_t\left(\boldsymbol{M}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_t\right)^{-1}\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t^{\perp} = \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{G}_t^{-1}\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t - \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{G}_t^{-1}\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{\beta}_t.$$

性質(B3) から、

$$\frac{1}{N}\left[\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t\right]_{t'} - \frac{\xi_{\mathrm{in},t-1}}{M}\boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{t-1} = \frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t - \frac{\xi_{\mathrm{in},t-1}}{M}\boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{t-1} \to 0.$$

上記を第一項に適用すると、

$$\frac{1}{\delta N}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{G}_t^{-1}\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t \to \frac{\xi_{\mathrm{in},t-1}}{\delta M}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{G}_t^{-1}\boldsymbol{M}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{t-1} = \frac{\xi_{\mathrm{in},t-1}}{\delta}\boldsymbol{m}_{t-1}.$$

性質(A1)の証明[3-3]

第二項に関して、

$$\frac{1}{\delta N}\left[\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{\beta}_t\right]_{t'} = \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{\beta}_t = \frac{1}{\delta N}\sum_{\tau=0}^{t-1}\beta_\tau \boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_\tau .$$

性質(B3) を使って、

$$\frac{1}{\delta N}\left[\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{\beta}_t\right]_{t'} \to \frac{1}{\delta M}\sum_{\tau=1}^{t-1}\beta_\tau \xi_{\mathrm{in},\tau-1}\boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{\tau-1} .$$

これを第二項に適用すると、

$$\frac{1}{\delta N}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{G}_t^{-1}\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{\beta}_t \to \frac{1}{\delta M}\sum_{\tau=1}^{t-1}\beta_\tau \xi_{\mathrm{in},\tau-1}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{G}_t^{-1}\boldsymbol{M}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{\tau-1}$$

$$= \sum_{\tau=1}^{t-1}\beta_\tau \frac{\xi_{\mathrm{in},\tau-1}}{\delta}\boldsymbol{m}_{\tau-1} = \left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{M}_{t-1}\boldsymbol{\Lambda}_{t-1}\right)\boldsymbol{\beta}_t .$$

性質(A1)の証明[3-3]

以上の結果をまとめると、

$$\boldsymbol{b}_t \to \boldsymbol{B}_t \boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp} \widetilde{\boldsymbol{A}} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_t.$$

$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp} \widetilde{\boldsymbol{A}} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_t$は平均$\boldsymbol{0}$のガウス分布に従う。

$\widetilde{\boldsymbol{A}}_0 \in \mathbb{R}^{t\times(N-t)}$を$\mathcal{N}(0,1/M)$に従う独立な成分を持つ行列として、

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp} \widetilde{\boldsymbol{A}} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_t = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}_0 \\ \widetilde{\boldsymbol{A}} \end{pmatrix} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_t - \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\parallel} \widetilde{\boldsymbol{A}}_0 \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_t.$$

大システム極限で第二項は無視できるので、補題4.1を使うと、

$\left\| \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_t \right\|^2 = \boldsymbol{q}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp} \boldsymbol{q}_t = \|\boldsymbol{q}_t^{\perp}\|^2$から、

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp} \widetilde{\boldsymbol{A}} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_t \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{0}, M^{-1} \|\boldsymbol{q}_t^{\perp}\|^2 \boldsymbol{I}_M\right). \qquad \blacksquare$$

性質(A2)の証明[3-3]

帰納法により証明する。

$t < \tau, t' \le t$に対して、 $\frac{1}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_t - \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t \to 0$ を仮定して

$t = \tau, t' \le t$の場合を証明する。

$t' < t$のとき　　性質(A1)を使って、

$$\frac{1}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_\tau \sim \frac{1}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_\tau\boldsymbol{\beta}_\tau + \frac{1}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{A},\tau}.$$

大数の強法則から、第二項は0に概収束する。
第一項に帰納法の仮定と$\boldsymbol{\beta}_\tau = \boldsymbol{Q}_\tau^\dagger\boldsymbol{q}_\tau$を使うと、

$$\frac{1}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_\tau \to \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\tau\boldsymbol{\beta}_\tau = \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}_\tau}^{\parallel}\boldsymbol{q}_\tau = \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_\tau.$$

性質(A2)の証明[3-3]

$t' = t$のとき $$\frac{1}{M}\boldsymbol{b}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_\tau \to \frac{1}{M}\boldsymbol{\beta}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_\tau\boldsymbol{\beta}_\tau + \frac{1}{M}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{A},\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{A},\tau}.$$

帰納法の仮定と$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{A},\tau} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, M^{-1}\|\boldsymbol{q}_\tau^{\perp}\|^2\boldsymbol{I}_M)$を使うと、

$$\frac{1}{M}\boldsymbol{b}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_\tau \to \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{\beta}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\tau\boldsymbol{\beta}_\tau + \frac{1}{M}\|\boldsymbol{q}_\tau^{\perp}\|^2$$
$$= \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{q}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}_\tau}^{\parallel}\boldsymbol{q}_\tau + \frac{1}{\delta N}\|\boldsymbol{q}_\tau^{\perp}\|^2 = \frac{1}{\delta N}\left\|\boldsymbol{q}_\tau^{\parallel}\right\|^2 + \frac{1}{\delta N}\|\boldsymbol{q}_\tau^{\perp}\|^2.$$

ただし、 $\boldsymbol{q}_\tau^{\parallel} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}_\tau}^{\parallel}\boldsymbol{q}_\tau.$

$\left(\boldsymbol{q}_\tau^{\parallel}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_\tau^{\perp} = 0$なので、 $$\frac{1}{M}\boldsymbol{b}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_\tau \to \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{q}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_\tau.$$ ■

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

性質(A3)の証明[3-5]

定義$\boldsymbol{m}_t = \xi_{\mathrm{out},t}^{-1}\eta_{\mathrm{out},t}\left(\bar{\zeta}_t\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}^{-1}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}_t, f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right)$を使うと、

$$\frac{1}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t = \frac{1}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\eta_{\mathrm{out},t}\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}_t, f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right)$$

$$\to \frac{1}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[[\boldsymbol{b}_{t'}]_m\eta_{\mathrm{out},t}\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}z_m + [\boldsymbol{b}_t]_m, f(z_m, w_m)\right)\right].$$

最後の表現は、大数の強法則のためである。性質(A1)から$\boldsymbol{b}_{t'}$はi.i.d.ガウス要素を持つため、Steinの補題を使うと、

$$\frac{\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t}{M} \to \frac{1}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[[\boldsymbol{b}_{t'}]_m[\boldsymbol{b}_t]_m\right]\mathbb{E}\left[\frac{\partial\eta_{\mathrm{out},t}}{\partial Z_t}\right]$$

$$+\frac{1}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[[\boldsymbol{b}_{t'}]_m z_m\right]\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}\mathbb{E}\left[\frac{\partial\eta_{\mathrm{out},t}}{\partial Z_t}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{\partial\eta_{\mathrm{out},t}}{\partial Z}\right]\right).$$

性質(A3)の証明[3-5]

$\boldsymbol{b}_t$はi.i.d.な要素を持つため、

$$\frac{1}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t \to \frac{\mathbb{E}\left[\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_t\right]}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}M}\bar{\xi}_{\mathrm{out},t} + \frac{\mathbb{E}\left[\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\right]}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}M}\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}\bar{\xi}_{\mathrm{out},t} - \bar{\zeta}_t\right)$$

$$= \frac{1}{M}\mathbb{E}\left[\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_t\right]$$

性質(A2)を使うと、

$$\frac{1}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t - \frac{1}{\delta N}\boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t \to 0. \qquad \blacksquare$$

性質(B1)の証明[3-3]

$\boldsymbol{h}_t$を更新する直前までの反復を固定する。

$$\boldsymbol{B}_{t+1} - (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{M}_t \boldsymbol{\Lambda}_t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{t+1}, \qquad \boldsymbol{Q}_t - \boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_t.$$

上記の制約式の下で、補題5.1の後半を使うと、

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp} \boldsymbol{B}_{t+1} \boldsymbol{Q}_{t+1}^{\dagger} + \left(\boldsymbol{M}_t^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Q}_t - \boldsymbol{H}_t)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp} \widetilde{\boldsymbol{A}} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{t+1}}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}.$$

ただし、$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp} \boldsymbol{M}_t = \boldsymbol{O}$を使った。

定義$\boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{q}_t - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m}_t$に上記を代入して、

$$\boldsymbol{h}_t \sim \boldsymbol{q}_t - \boldsymbol{Q}_{t+1} \left(\boldsymbol{Q}_{t+1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{t+1}\right)^{-1} \boldsymbol{B}_{t+1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m}_t^{\perp} + (\boldsymbol{H}_t - \boldsymbol{Q}_t) \boldsymbol{\alpha}_t$$
$$+ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{t+1}}^{\perp} \widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m}_t.$$

性質(B1)の証明[3-3]

$\boldsymbol{G}_t = N^{-1}\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t$とし、$\boldsymbol{m}_t^{\perp} = \boldsymbol{m}_t - \boldsymbol{M}_t\boldsymbol{\alpha}_t$を使って第二項を評価する。

$$\boldsymbol{Q}_{t+1}\left(\boldsymbol{Q}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{t+1}\right)^{-1}\boldsymbol{B}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t^{\perp} = \frac{\delta}{M}\boldsymbol{Q}_{t+1}\boldsymbol{G}_{t+1}^{-1}\boldsymbol{B}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t - \frac{\delta}{M}\boldsymbol{Q}_{t+1}\boldsymbol{G}_{t+1}^{-1}\boldsymbol{B}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{\alpha}_t.$$

性質(A3) から、

$$\frac{\delta}{M}\left[\boldsymbol{B}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t\right]_{t'} - \frac{1}{N}\boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t = \frac{\delta}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t - \frac{1}{N}\boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t \to 0.$$

上記を第一項に適用すると、

$$\frac{\delta}{M}\boldsymbol{Q}_{t+1}\boldsymbol{G}_{t+1}^{-1}\boldsymbol{B}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t \to \frac{1}{N}\boldsymbol{Q}_{t+1}\boldsymbol{G}_{t+1}^{-1}\boldsymbol{Q}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t = \boldsymbol{q}_t.$$

性質(B1)の証明[3-3]

第二項に関して、

$$\frac{\delta}{M}\left[\boldsymbol{B}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{\alpha}_t\right]_{t'} = \frac{\delta}{M}\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{\alpha}_t = \frac{\delta}{M}\sum_{\tau=0}^{t-1}\alpha_\tau\boldsymbol{b}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_\tau .$$

性質(A3) を使って、

$$\frac{\delta}{M}\left[\boldsymbol{B}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{\alpha}_t\right]_{t'} \to \frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{t-1}\alpha_\tau\boldsymbol{q}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_\tau .$$

これを第二項に適用すると、

$$\frac{\delta}{M}\boldsymbol{Q}_{t+1}\boldsymbol{G}_{t+1}^{-1}\boldsymbol{B}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{\alpha}_t \to \frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{t-1}\alpha_\tau\boldsymbol{Q}_{t+1}\boldsymbol{G}_{t+1}^{-1}\boldsymbol{Q}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_\tau$$

$$= \sum_{\tau=0}^{t-1}\alpha_\tau\boldsymbol{q}_\tau = \boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{\alpha}_t.$$

性質(B1)の証明[3-3]

以上の結果をまとめると、

$$\boldsymbol{h}_t \to \boldsymbol{H}_t\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{t+1}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t.$$

$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{t+1}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t$は平均$\boldsymbol{0}$のガウス分布に従う。

$\widetilde{\boldsymbol{A}}_0 \in \mathbb{R}^{(M-t)\times(t+1)}$を$\mathcal{N}(0,1/M)$に従う独立な成分を持つ行列として、

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{t+1}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{t+1}}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{A}}_0^{\mathrm{T}} \\ \widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t - \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{t+1}}^{\parallel}\widetilde{\boldsymbol{A}}_0^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t.$$

大システム極限で第二項は無視できるので、補題4.1を使うと、

$\left\|\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t\right\|^2 = \boldsymbol{m}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\boldsymbol{m}_t = \|\boldsymbol{m}_t^{\perp}\|^2$から、

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{Q}_{t+1}}^{\perp}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}_t}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, M^{-1}\|\boldsymbol{m}_t^{\perp}\|^2\boldsymbol{I}_N). \quad \blacksquare$$

性質(B2)の証明[3-3]

帰納法により証明する。

$t < \tau, t' \leq t$に対して、 $\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_t - \frac{1}{M}\boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t \to 0$ を仮定して

$t = \tau, t' \leq t$の場合を証明する。

$t' < t$のとき　　性質(B1)を使って、

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_\tau \sim \frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_\tau\boldsymbol{\alpha}_\tau + \frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B},\tau}.$$

大数の強法則から、第二項は0に概収束する。
第一項に帰納法の仮定と$\boldsymbol{\alpha}_\tau = \boldsymbol{M}_\tau^\dagger\boldsymbol{m}_\tau$を使うと、

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_\tau \to \frac{1}{M}\boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_\tau\boldsymbol{\alpha}_\tau = \frac{1}{M}\boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_\tau}^{\parallel}\boldsymbol{m}_\tau = \frac{1}{M}\boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_\tau.$$

性質(B2)の証明[3-3]

$t' = t$のとき $$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_\tau \to \frac{1}{N}\boldsymbol{\alpha}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_\tau\boldsymbol{\alpha}_\tau + \frac{1}{N}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B},\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B},\tau}.$$

帰納法の仮定と$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B},\tau} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, M^{-1}\|\boldsymbol{m}_\tau^{\perp}\|^2\boldsymbol{I}_N)$を使うと、

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_\tau \to \frac{1}{M}\boldsymbol{\alpha}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_\tau\boldsymbol{\alpha}_\tau + \frac{1}{M}\|\boldsymbol{m}_\tau^{\perp}\|^2$$
$$= \frac{1}{M}\boldsymbol{m}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_\tau}^{\parallel}\boldsymbol{m}_\tau + \frac{1}{M}\|\boldsymbol{m}_\tau^{\perp}\|^2 = \frac{1}{M}\left\|\boldsymbol{m}_\tau^{\parallel}\right\|^2 + \frac{1}{M}\|\boldsymbol{m}_\tau^{\perp}\|^2.$$

ただし、 $\boldsymbol{m}_\tau^{\parallel} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_\tau}^{\parallel}\boldsymbol{m}_\tau.$

$\left(\boldsymbol{m}_\tau^{\parallel}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_\tau^{\perp} = 0$なので、 $\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_\tau \to \frac{1}{M}\boldsymbol{m}_\tau^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_\tau.$ ■

性質(B3)の証明[3-3]

定義$\boldsymbol{q}_{t+1} = \eta_{\mathrm{in},t}\left(\bar{\zeta}_t \bar{\xi}_{\mathrm{out},t}^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}_t\right) - \bar{\zeta}_{t+1}\bar{\xi}_{\mathrm{out},t+1}^{-1}\boldsymbol{x}$を使うと、

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_{t+1} \to \frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\eta_{\mathrm{in},t}\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}_t\right)$$

$$\to \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[[\boldsymbol{h}_{t'}]_n \eta_{\mathrm{in},t}\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}x_n + [\boldsymbol{h}_t]_n\right)\right].$$

最後の表現は、大数の強法則のためである。性質(B1)から$\boldsymbol{h}_{t'}$はi.i.d.ガウス要素を持つため、Steinの補題を使うと、

$$\frac{\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_{t+1}}{N} \to \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[[\boldsymbol{h}_{t'}]_n[\boldsymbol{h}_t]_n\right]\mathbb{E}\left[\eta_{\mathrm{in},t}'\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}x_n + [\boldsymbol{h}_t]_n\right)\right].$$

性質(B3)の証明[3-3]

$\boldsymbol{h}_t$はi.i.d.な要素を持つため、

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_{t+1} \to \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_t\right]\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[\eta_{\mathrm{in},t}'\left(\frac{\bar{\zeta}_t}{\bar{\xi}_{\mathrm{out},t}}x_n + [\boldsymbol{h}_t]_n\right)\right].$$

定義$\xi_{\mathrm{in},t} = \langle \eta_{\mathrm{in},t}'(\boldsymbol{x}_t)\rangle$を使うと、大数の強法則から、

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_{t+1} - \frac{\xi_{\mathrm{in},t}}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_t \to 0.$$

性質(B2)を使うと、 $\frac{1}{N}\boldsymbol{h}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_{t+1} - \frac{\xi_{\mathrm{in},t}}{M}\boldsymbol{m}_{t'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_t \to 0.$ ■