音声中の補題3.1という発言は、補題4.1のことと理解してください。

Understand Lemma Lemma 3.1 in voice as Lemma 4.1

確率統計

Probability and Statistics

第4回講義資料

Lecture notes 4

平均、分散、正規分布

Mean, Variance, and Normal Distribution

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授　竹内啓悟

Associate Professor　Keigo Takeuchi

総和の性質(Properties of summation)

性質1(Property 1)

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i\,.$$

∵ 帰納法で証明する。$n=1$の場合は自明なので、$n=k$の場合の成立を仮定して、$n=k+1$の場合を示す。

The proof is by induction. Since the case $n=1$ is trivial, we assume the correctness of the statement for $n=k$, and prove the statement for $n=k+1$.

$$\sum_{i=1}^{k+1}(ax_i + by_i) = ax_{k+1} + by_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(ax_i + by_i)$$

$$= ax_{k+1} + by_{k+1} + a\sum_{i=1}^{k} x_i + b\sum_{i=1}^{k} y_i$$

$$= a\left(x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} x_i\right) + b\left(y_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} y_i\right) = a\sum_{i=1}^{k+1} x_i + b\sum_{i=1}^{k+1} y_i\,. \quad \blacksquare$$

期待値の性質(Properties of Expectation)

性質1(Property 1)　任意の確率変数XとYに対して、(For all random variables X and Y,)

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] \quad \text{for all } a, b \in \mathbb{R}.$$

∵ 期待値の定義における総和や積分の線形性から従う。

Due to the linearity of the summation or integral in the definition of expectation.

性質2(Property 2)

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

∵　$\mu = \mathbb{E}[X]$とおく。性質1を使って、(Let $\mu = \mathbb{E}[X]$. Using Property 1 yields)

$$\mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\mathbb{E}[X] + \mu^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

離散分布の例(Examples of discrete distributions)

ベルヌーイ分布(Bernoulli distribution)

ベルヌーイ確率変数Xは確率pで1を取り、確率$1-p$で0を取る。

A Bernoulli random variable X takes 1 and 0 with probabilities p and $1-p$, respectively.

二項分布(Binomial distribution) : $\mathcal{B}(n,p)$

二つのパラメータ$n\in\mathbb{N}$と$p\in[0,1]$を持つ二項確率変数Xは、整数$k\in\{0,\ldots,n\}$を確率p_kで取る。

A binomial random variable X with two parameters n and p takes an integer $k\in\{0,\ldots,n\}$ with probability p_k.

$$p_k=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

ポアソン分布(Poisson distribution)

パラメータ$\lambda>0$を持つポアソン確率変数Xは、$n=0,1,\ldots$を確率p_nで取る。

A Poisson random variable X with a parameter $\lambda>0$ takes $n=0,1,\ldots$ with probability p_n.

$$p_n=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

平均と分散の計算(Computation of mean and variance)

ベルヌーイ分布(Bernoulli distribution)

$$\mathbb{E}[X] = p, \qquad \mathbb{V}[X] = p(1-p).$$

確かめよ。(Confirm them.)

ポアソン分布(Poisson distribution)

確率の正規化$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$を使う。(use the normalization $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n-1)!} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} e^{-\lambda}}{(n-1)!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \lambda^n e^{-\lambda}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1+1) \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n-1)!} = \lambda^2 + \lambda.$$

$$\therefore \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \lambda.$$

平均と分散の計算(Computation of mean and variance)

二項分布(Binomial distribution) : $\mathcal{B}(n,p)$

確率の正規化(二項定理)を使う。(Use the normalization (binomial theorem).)

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1.$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k p_k = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!\, p^k (1-p)^{n-k}}{(n-k)!\,(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!\, p^{k+1} (1-p)^{n-1-k}}{(n-1-k)!\, k!} = np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!\, p^k (1-p)^{n-1-k}}{(n-1-k)!\, k!} = np.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = np(1-p) + (np)^2.$$

確かめよ。(Confirm it.)

$$\therefore\ \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = np(1-p).$$

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

連続分布の例(Examples of continuous distributions)

一様分布(Uniform distribution)

区間$[a,b]$上の一様確率変数Xの確率密度関数は、以下で与えられる。

The pdf of a uniform random variable X on $[a,b]$ is given by

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad x \in [a,b].$$

指数分布(Exponential distribution)

パラメータ$\lambda > 0$を持つ指数確率変数Xの確率密度関数は、以下である。

The pdf of an exponential random variable X with a parameter $\lambda > 0$ is defined as

$$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \in [0,\infty).$$

ラプラス分布(Laplace distribution)

パラメータ$\mu \in \mathbb{R}$と$\phi > 0$を持つラプラス確率変数Xは、次の確率密度関数を持つ。

A Laplace random variable X with parameters $\mu \in \mathbb{R}$ and $\phi > 0$ has the following pdf:

$$p_X(x) = \frac{1}{2\phi} e^{-\frac{|x-\mu|}{\phi}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

平均と分散の計算(Computation of mean and variance)

一様分布(Uniform distribution)

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b x p_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

$$\therefore \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

指数分布(Exponential distribution)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$\mathbb{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$ 確かめよ。(Confirm it.)

平均と分散の計算(Computation of mean and variance)

ラプラス分布(Laplace distribution)

変数変換$y = x - \mu$から、(From the change of a variable $y = x - \mu$,)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2\phi} e^{-\frac{|x-\mu|}{\phi}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (y+\mu) \frac{1}{2\phi} e^{-\frac{|y|}{\phi}} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{2\phi} e^{-\frac{|y|}{\phi}} dy + \mu = \mu.$$

3番目の等号は確率密度関数の正規化から、最後の等号は第一項の被積分関数が奇関数であることから従う。

The second last equality follows from the normalization of the pdf, and the last equality from the fact that the integrand in the first term is an odd function.

$\mathbb{V}[X] = 2\phi^2$　確かめよ。(Confirm it.)

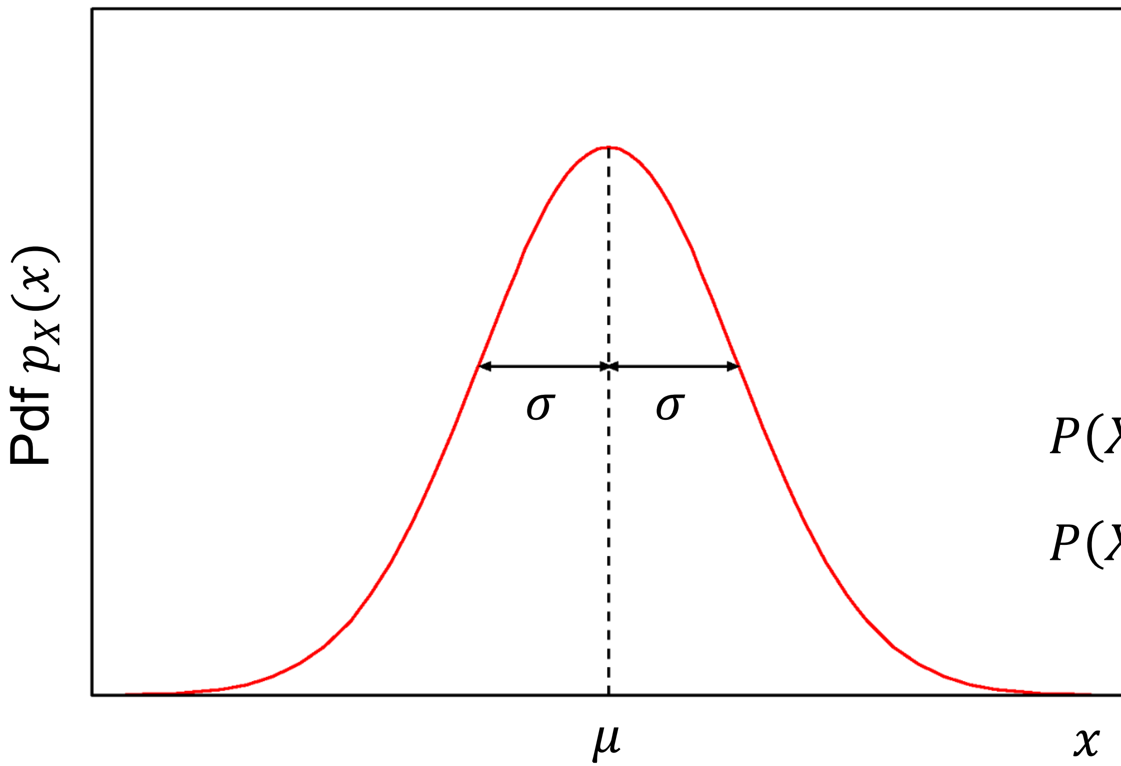
正規分布(Normal distribution)

正規確率変数Xの確率密度関数

Probability density function (pdf) of a normal random variable X

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

工学では、ガウス分布とも呼ばれる。(It is called Gaussian distribution in engineering.)



$$P(X \geq \mu + \sigma) \approx 15.9\%$$

$$P(X \geq \mu + 2\sigma) \approx 2.28\%$$

$$P(X \geq \mu + 3\sigma) \approx 0.135\%$$

$$P(X \geq \mu + 4\sigma) \approx 3.17 \times 10^{-3}\%$$

$$P(X \geq \mu + 5\sigma) \approx 2.87 \times 10^{-5}\%$$

正規分布の規格化(Normalization of normal distributions)

補題4.1(Lemma 4.1)

任意の$\mu \in \mathbb{R}$と$\sigma^2 > 0$に対して、(For any μ and $\sigma^2 > 0$,)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

証明(Proof)：　二重積分を使って、$I^2 = 1$を証明する。(Prove $I^2 = 1$ with a double integral.)

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dxdy$$

$x = \mu + r\cos\theta$、$y = \mu + r\sin\theta$と変数変換するために、ヤコビアンを計算する。

To perform the change of variables, we compute the Jacobian.

$$|J| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

それゆえ、
Thus, we have

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} |J|$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) \right]_{r=0}^{r=\infty} = 1. \quad \blacksquare$$

正規分布の性質(Properties of normal distributions)

平均(Mean)： $u=(x-\mu)/\sigma$と変数変換すると、(Using the change of a variable yields)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \mu.$$

二番目の等号で、補題4.1を使った。(In the second equality, we have used Lemma 4.1.)

最後の等号は、第二項の被積分関数の奇関数性から従う。

The last equality follows from the fact that the integrand in the second term is an odd function.

分散(Variance)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p_X(x)dx = \sigma^2.$$

確かめよ。(Confirm it.)

ヒント(Hint)： 平均の場合と同じ変数変換をした後、部分積分と補題4.1を使って積分を評価せよ。

After using the same change of a variable as in the mean case, use the integration by parts and Lemma 4.1 to evaluate the integral.

宿題(Homework)

1. 4ページ目のスライドで定義したベルヌーイ確率変数Xの平均$\mathbb{E}[X]$と分散$\mathbb{V}[X]$を計算せよ。

Compute the mean and variance of a Bernoulli random variable X shown in page 4.

2. 6ページ目のスライドで定義した二項確率変数Xの二次モーメント$\mathbb{E}[X^2]$を計算せよ。

Compute the second moment of a Binomial random variable X shown in page 6.

ヒント(Hint)：
$$\frac{k^2}{k!} = \frac{k}{(k-1)!} = \frac{k-1+1}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-1)!}.$$

3. 7ページ目のスライドで定義した指数確率変数Xの平均$\mathbb{E}[X]$と分散$\mathbb{V}[X]$を計算せよ。

Compute the mean and variance of an exponential random variable X shown in page 7.

4. 7ページ目のスライドで定義したラプラス確率変数Xの平均$\mathbb{E}[X]$と分散$\mathbb{V}[X]$を計算せよ。

Compute the mean and variance of a Laplace random variable X shown in page 7.