# 確率統計
Probability and Statistics

# 第5回講義資料
Lecture notes 5

# 共分散と大数の弱法則
Covariance and Weak Law of Large Numbers

豊橋技術科学大学
Toyohashi University of Technology
電気・電子情報工学系
Department of Electrical and Electronic Information Engineering
准教授　竹内啓悟
Associate Professor　Keigo Takeuchi

# 総和の性質(Properties of summation)

## 性質1(Property 1)

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i\,.$$

$\because$ 帰納法で証明する。$n=1$の場合は自明なので、$n=k$の場合の成立を仮定して、$n=k+1$の場合を示す。

The proof is by induction. Since the case $n=1$ is trivial, we assume the correctness of the statement for $n=k$, and prove the statement for $n=k+1$.

$$\sum_{i=1}^{k+1}(ax_i + by_i) = ax_{k+1} + by_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(ax_i + by_i)$$

$$= ax_{k+1} + by_{k+1} + a\sum_{i=1}^{k} x_i + b\sum_{i=1}^{k} y_i$$

$$= a\left(x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} x_i\right) + b\left(y_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} y_i\right) = a\sum_{i=1}^{k+1} x_i + b\sum_{i=1}^{k+1} y_i\,. \qquad \blacksquare$$

## 総和の性質(Properties of summation)

### 性質2(Property 2)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j .$$

$\because$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j ,$$

最後の等号は、総和$\sum_j x_j$にとって係数$x_i$は定数であるため、総和の性質1から従う。

where the last equality follows from Property 1 of summation, since the coefficient $x_i$ is a constant for the summation $\sum_j x_j$ . ■

便利な総和記号を計算に不向きな以下の表現に決して書き換えるな！

Never re-write the convenient summation notation as the following representation unsuitable for computation!

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# 期待値の性質(Properties of Expectation)

**性質1**(Property 1)　任意の確率変数$X$と$Y$に対して、(For all random variables $X$ and $Y$,)

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] \quad \text{for all } a, b \in \mathbb{R}.$$

**性質2**(Property 2)

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

**性質3**(Property 3)　独立な確率変数列$\{X_i\}_{i=1}^n$に対して、

For independent random variables $\{X_i\}_{i=1}^n$,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[g_i(X_i)].$$

∵ 独立性の定義から従う。(Due to the definition of independence.)

## 共分散の性質(Properties of covariance)

**性質1**(Property 1) $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$

$$\because\quad \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]=\mathbb{E}[XY-X\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[X]Y+\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]]$$
$$=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]+\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

二つの確率変数$X$と$Y$は、以下の条件を満たすとき、無相関と呼ばれる。

Two random variables $X$ and $Y$ are said to be uncorrelated if the following holds:

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]=0.$$

**性質2**(Property 2)

二つの確率変数$X$と$Y$が独立ならば、$X$と$Y$は無相関である。

If two random variables $X$ and $Y$ are independent, they are uncorrelated.

$\because$ 期待値の性質3から、(From Property 3 of expectation, we have)

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]=\mathbb{E}\big[X-\mathbb{E}[X]\big]\mathbb{E}[Y-\mathbb{E}[Y]]$$
$$=(\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[Y])=0.$$

**注意**(Remark): 逆は正しくない。(The converse is not correct.)

## 相関係数(Correlation coefficient)

確率変数$X$と$Y$の分散をそれぞれ$\sigma_X^2$と$\sigma_Y^2$とする。

Suppose that random variables $X$ and $Y$ have variance $\sigma_X^2$ and $\sigma_Y^2$, respectively.

相関係数

Correlation coefficient

$$\rho = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

### 補題5.1 (コーシー・シュワルツの不等式)

Lemma 5.1 (Cauchy-Schwarz inequality)

$$(\mathbb{E}[XY])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2].$$

有限の確率で$XY \neq 0$ならば、等号成立は$Y = aX$ ($\exists a \in \mathbb{R}$)に限る。

Suppose $XY \neq 0$ with a finite probability. The equality holds only when $Y = aX$ for some $a \in \mathbb{R}$.

補題5.1から、相関係数$\rho$は区間$[-1, 1]$に入り、$\rho = 0$は無相関を、$\rho = \pm 1$は$Y - \mathbb{E}[Y]$が$X - \mathbb{E}[X]$の定数倍であることを示す。

From Lemma 5.1, the correlation coefficient $\rho$ falls into the interval $[-1, 1]$. $\rho = 0$ and $\rho = \pm 1$ indicate that $X$ and $Y$ are uncorrelated, and that $Y - \mathbb{E}[Y]$ is a multiple of $X - \mathbb{E}[X]$, respectively.

## 補題5.1の証明(Proof of Lemma 5.1)

確率1で$X = 0$または$Y = 0$の場合は自明なので、$X \neq 0$かつ$Y \neq 0$を仮定する。

Assume $X \neq 0$ and $Y \neq 0$, since the case of $X = 0$ or $Y = 0$ with probability 1 is trivial.

関数$f(t) = \mathbb{E}[(tY - X)^2]$を定義する。(Define the function $f(t) = \mathbb{E}[(tY - X)^2]$.)

期待値の性質1から、(Property 1 of expectation implies)

$$f(t) = \mathbb{E}[t^2Y^2 - 2tXY + X^2] = \mathbb{E}[Y^2]t^2 - 2\mathbb{E}[XY]t + \mathbb{E}[X^2].$$

$$= \mathbb{E}[Y^2]\left(t - \frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]}\right)^2 + \mathbb{E}[X^2] - \frac{(\mathbb{E}[XY])^2}{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

任意の$t \in \mathbb{R}$に関して$f(t) \geq 0$なので、

Since $f(t) \geq 0$ holds for any $t \in \mathbb{R}$, we have

$$0 \leq \min_{t \in \mathbb{R}} f(t) = \mathbb{E}[X^2] - \frac{(\mathbb{E}[XY])^2}{\mathbb{E}[Y^2]},$$

これはコーシー・シュワルツの不等式と等価である。

which is equivalent to the Cauchy-Schwarz inequality.

等号が成立する必要十分条件は、$t_0 = \mathbb{E}[XY]/\mathbb{E}[Y^2]$として$f(t_0) = 0$である。

The equality holds If and only if $f(t_0) = 0$ holds with $t_0 = \mathbb{E}[XY]/\mathbb{E}[Y^2]$.

$$\mathbb{E}[(X - t_0Y)^2] = 0 \iff X - t_0Y = 0 \text{ with probability 1.} \qquad \blacksquare$$

## 分散の和(Sum of variance)

定理5.1(Theorem 5.1)

$\{X_i\}_{i=1}^n$を無相関な確率変数列とする。和$Y=\sum_{i=1}^n X_i$の分散は、分散の和に等しい。

Let $\{X_i\}_{i=1}^n$ denote uncorrelated random variables. The variance of the sum $Y=\sum_{i=1}^n X_i$ is equal to the sum of the variance.

$$\mathbb{V}[Y]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}[X_i].$$

### 注意(Remark)

無相関性をより強い条件である組ごとの独立性や独立性に置き換えても、当然、定理は従う。

The theorem is of course correct, when the assumption of uncorrelated variables is replaced with pairwise independence or independence, which are stronger conditions.

## 定理5.1の証明(Proof of Theorem 5.1)

$\tilde{X}_i = X_i - \mathbb{E}[X_i]$とおくことで、一般性を失うことなく、$\mathbb{E}[X_i] = 0$を仮定できる。

Without loss of generality, we can assumed $\mathbb{E}[X_i] = 0$ by letting $\tilde{X}_i = X_i - \mathbb{E}[X_i]$.

期待値の性質1から、$\mathbb{E}[Y] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = 0$が従う。それゆえ、

Property 1 of expectation implies $\mathbb{E}[Y] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = 0$. Thus, we have

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_i X_j],$$

最後の等号は、期待値の性質1のためである。

where the last equality is due to Property 1 of expectation.

無相関仮定$\mathbb{E}[X_i X_j] = 0\ (i \neq j)$を使うために、総和を二つに分ける。

We decompose the summation into two terms to utilize the assumption of uncorrelated variables,

$$\mathbb{V}[Y] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i],$$

最後の等号は、$\mathbb{E}[X_i] = 0$から従う。

where the last equality follows from $\mathbb{E}[X_i] = 0$. ■

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# 確率変数の標準化(Standardization of random variables)

平均$\mu$分散$\sigma^2$の無相関な確率変数列$\{X_i\}_{i=1}^n$に対して、標準化された確率変数$Y$を以下で定義する。

For uncorrelated random variables $\{X_i\}_{i=1}^n$ with mean $\mu$ and variance $\sigma^2$, define the standardized random variable $Y$ as

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma}.$$

確率変数$Y$は、平均0分散1である。(The random variable $Y$ has zero mean and unit variance.)

平均(Mean)：

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[X_i] - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0.$$

分散(Variance)： $\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] = 1.$ 確かめよ。(Confirm it.)

注意(Remark) 平均0分散1の確率変数は、標準確率変数と呼ばれる。

A random variable with zero mean and unit variance is called standard random variable.

## 公理的確率論の妥当性(Validity of axiomatic probability theory)

### 確率とは何か？(What is probability?)

0と1の間の実数値である。(公理的定義)

It is a real number between 0 and 1. (Axiomatic definition)

明日の降水確率は30%である。(確信度）

The chance of rain in tomorrow is 30%. (Belief)

コインを投げると確率1/2で表が出る。(頻度)

Coin-tossing results in a head with probability 1/2. (Frequency)

### 今日の目標(Today’s goal)

公理的確率は頻度としての確率と解釈できることを示す。

Prove that axiomatic probability can be interpreted as frequency.)

確信度としての確率は、本講義では扱わない。

The interpretation of probability as belief is not treated in this lecture.

# 大数の弱法則(Weak law of large numbers)

定理5.2(Theorem 5.2)

$\{X_i\}_{i=1}^n$を平均$\mu$分散$\sigma^2$の同一分布する確率変数列とする。確率変数列が無相関ならば($\mathbb{E}[(X_i-\mu)(X_j-\mu)]=0$ for $i \neq j$)、極限$n \to \infty$において、算術平均$Y_n$は平均$\mu$に確率収束する。

Let $\{X_i\}_{i=1}^n$ denote a sequence of identically distributed random variables with mean $\mu$ and variance $\sigma^2$. If they are uncorrelated, the arithmetic average converges in probability to the mean $\mu$ as $n \to \infty$.

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathrm{p}} \mu.$$

大数の法則が成り立つように、期待値を定義したとも言える。

We can say that expectation was defined so that the law of large numbers holds.

## 確率収束(Convergence in probability)

$$Y_n \xrightarrow{\mathrm{p}} \mu \quad \overset{\mathrm{def}}{=} \quad \lim_{n\to\infty} P(|Y_n-\mu|<\epsilon)=1 \ \text{ for any } \epsilon>0.$$

# 例：コイン投げ(Example: Coin tossing)

コインを投げた時に、$i$回目に表が出れば$X_i = 1$、裏が出れば$X_i = 0$とする。独立なコイン投げを$n$回行ったときに表が出る相対頻度を$Y_n = n^{-1}\sum X_i$とする。定理5.2から、相対頻度$Y_n$は平均$\mathbb{E}[X_i]$に収束する。

Let $X_i = 1$ for a head in $i$th coin tossing. Otherwise, $X_i = 0$. The relative frequency for heads is defined as $Y_n$ in $n$ independent trials of coin tossing. Theorem 5.2 implies that $Y_n$ tends to the mean $\mathbb{E}[X_i]$.

$$Y_n \xrightarrow{\mathrm{p}} \mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$

ただし、$p$は公理的意味での表が出る確率を表す。

where $p$ represents the probability with which a head occurs in the sense of axiomatic probability.

公理的確率は、試行を無限回行ったときに事象が発生する相対頻度と解釈できる。

Axiomatic probability can be interpreted as a relative frequency at which the corresponding events occur in infinite trials.

# 定理5.2の証明の準備(Preliminary for the proof of Theorem 5.2)

補題5.2 (マルコフの不等式) Lemma 5.2 (Markov's inequality)

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a} \quad \text{for any } a > 0.$$

証明(Proof)： 指示関数$1(|X| \geq a)$を使って左辺を表現する。

Represent the left-hand side (LHS) with the indicator function.

$$P(|X| \geq a) = \mathbb{E}[1(|X| \geq a)], \qquad 1(\text{true}) = 1, \qquad 1(\text{false}) = 0.$$

$$\because \mathbb{E}[1(|X| \geq a)] = 1 \cdot P(|X| \geq a) + 0 \cdot P(|X| < a) = P(|X| \geq a).$$

指示関数に対する上界式を使う。

Use an upper bound on the indicator function.

$$1(|X| \geq a) \leq \frac{|X|}{a}.$$

$\because$ For $|X| \geq a$, $1(|X| \geq a) = 1 \leq |X|/a$. Otherwise, $1(|X| \geq a) = 0 \leq |X|/a$.

それゆえ、

Thus, we have

$$P(|X| \geq a) = \mathbb{E}[1(|X| \geq a)] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}.$$

■

# 定理5.2の証明の準備(Preliminary for the proof of Theorem 5.2)

**補題5.3 (チェビシェフの不等式)** Lemma 5.3 (Chebyshev's inequality)

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{a^2} \quad \text{for any } a > 0.$$

**証明**(Proof)： マルコフの不等式を使って、(Using Markov's inequality yields)

$$P(|X| \geq a) = P(|X|^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{a^2}. \qquad \blacksquare$$

## チェビシェフの不等式の意義(Significance of Chebyshev's inequality)

マルコフの不等式による上界$\mathbb{E}[|X|]/a$は、$X$が非負の確率変数でないと評価が難しいのに対して、チェビシェフの不等式による上界 $\mathbb{E}[X^2]/a^2$ は、評価が容易である。

The upper bound in Markov's inequality is difficult to evaluate, unless $X$ is non-negative. On the other hand, the upper bound due to Chebyshev's inequality is easy to calculate.

## 定理5.2の証明(Proof of Theorem 5.2)

次を示せばよい。

It is sufficient to prove the following:

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

任意の$\epsilon > 0$に対して、チェビシェフの不等式を使うと、

For any $\epsilon > 0$, using Chebyshev's inequality yields

$$P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[(Y_n - \mu)^2]}{\epsilon^2}.$$

定義$Y_n = n^{-1}\sum X_i$から、(The definition of $Y_n$ implies)

$$\mathbb{E}[(Y_n - \mu)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

定理の条件を使って、最後の等号を確かめよ。

(Confirm the last equality by using the conditions in the theorem.)

それゆえ、(Thus, we arrive at)

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} = 0. \quad \blacksquare$$