信号解析論

Signal Processing

第10回講義資料

Lecture notes 10

離散時間線形時不変システム1

Discrete-time and linear time-invariant systems 1

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授　竹内啓悟

Associate Professor　Keigo Takeuchi

離散時間線形時不変システム(Discrete-time linear time-invariant systems)

非因果的システム(Non-causal systems)

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

入力信号(Input signals)

$\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$

フィルタタップ(Filter taps)

$\{h[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$

出力信号(Output signals)

$\{y[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$

出力$y[n]$は、すべての入力信号$\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$に依存する。

The output $y[n]$ depends on all input signals $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

インパルス応答(Impulse response)

インパルス信号$x[n] = \delta_{n,0}$を入力すると、(Input the impulse signal $x[n] = \delta_{n,0}$.)

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\delta_{n-m,0} = h[n]$$

$\{h[n]\}$をインパルス応答と呼ぶ。

$\{h[n]\}$ are called impulse response.

離散時間線形時不変システム(Discrete-time linear time-invariant systems)

因果的システム(Causal systems)

$n < 0$に対して$h[n] = 0$の場合、システムは因果的である。

The system is said to be causal if $h[n] = 0$ holds for all $n < 0$.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

出力$y[n]$は、未来の入力信号$\{x[m]\}_{m=n+1}^{\infty}$に依存しない。

The output $y[n]$ is independent of the input signals $\{x[m]\}_{m=n+1}^{\infty}$ in the future.

有限インパルス応答(FIR)システム(Finite impulse response (FIR) systems)

因果的かつ$n > M$に対して$h[n] = 0$となるような$M > 0$が存在する。

Causal systems with some $M > 0$ such that $h[n] = 0$ for all $n > M$.

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=0}^{M} h[m]x[n-m]$$

離散時間線形時不変システム(Discrete-time linear time-invariant systems)

無限インパルス応答(IIR)システム(Infinite impulse response (IIR) systems)

$$y[n] = \sum_{m=0}^{P} p[m]x[n-m] - \sum_{m=1}^{Q} q[m]y[n-m]$$

$$p[n] = 0 \text{ for } n \notin \{0, \dots, P\}, \qquad q[n] = 0 \text{ for } n \notin \{0, \dots, Q\}$$

定理10.1(Theorem 10.1)

インパルス応答$\{h[n]\}$を以下で定義する。(Define the impulse response $\{h[n]\}$ as)

$$h[n] = p[n] - \sum_{m=1}^{Q} q[m]h[n-m] \ \text{ for } n > 0, \qquad h[n] = \begin{cases} p[0] & \text{for } n = 0, \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

IIRシステムの入出力関係は、等価な因果的システムで表現できる。
The input/output relationship for the IIR system can be represented with an equivalent causal system:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

一般に、等価システムはFIRにならない。(In general, the equivalent system does not have FIR.)

証明(Proof)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} q[m]y[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p[m]x[n-m], \qquad q[0]=1$$

$P(z)$と$Q(z)$を$\{p[n]\}$と$\{q[n]\}$のZ変換として、定理9.2を使って両辺をZ変換する。

Let $P(z)$ and $Q(z)$ denote the Z-transforms of $\{p[n]\}$ and $\{q[n]\}$, respectively. Use Theorem 9.2 to evaluate the Z-transforms of both sides.

$$Q(z)Y(z) = P(z)X(z)$$

$\{h[n]\}$のZ変換を$H(z)$とすると、$Y(z)=H(z)X(z)$なので、$P(z)=Q(z)H(z)$を満たすようにインパルス応答$\{h[n]\}$を定めればよい。

Let $H(z)$ denote the Z-transform of $\{h[n]\}$. Since $Y(z)=H(z)X(z)$ holds, it is sufficient to define $\{h[n]\}$ that satisfies $P(z)=Q(z)H(z)$.

$P(z)=Q(z)H(z)$を逆Z変換すると、(Use the inverse Z-transform of $P(z)=Q(z)H(z)$.)

$$p[n] = (q*h)[n] = \sum_{m=0}^{Q} q[m]h[n-m], \qquad h[n]=0 \text{ for } n<0$$

$q[0]=1$を使って$h[n]$に関して解くと、$h[n]$の更新式を得る。

Solving this with respect to $h[n]$, with $q[0]=1$, we obtain the update rule of $h[n]$. ■

安定性(Stability)

例10.1 Example 10.1

$$y[n] = x[n] + \frac{3}{2}y[n-1], \qquad x[n] = \delta_{n,0}, \qquad y[n] = 0 \text{ for } n < 0$$

$y[0] = x[0] = 1$、$n > 0$に対して等比数列$y[n] = (3/2)y[n-1]$を解くと

$y[0] = x[0] = 1$. For $n > 0$ solve the geometric sequence $y[n] = (3/2)y[n-1]$.

$$y[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty \ \text{ as } n \to \infty$$

有界入力有界出力(BIBO)安定性(Bounded-input bounded-output (BIBO) stability)

任意の有界入力$\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$に対して、出力$\{y[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$も有界であるとき、システムはBIBO安定である。

The system is said to be BIBO-stable if the output signals $\{y[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ are bounded for any bounded input $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

定理10.2(Theorem 10.2)

システムがBIBO安定であるための必要十分条件は、以下である。

A necessary and sufficient condition for the BIBO-stability of a system is

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

FIRシステムはBIBO安定

Any FIR system is BIBO-stable.

証明(Proof)

十分性の証明(Proof of the sufficiency)

入力は有界なので、すべてのnに対して$|x[n]| < K$を満たす$K > 0$が存在する。

The input boundedness implies that there is some $K > 0$ such that $|x[n]| < K$ holds for all n.

$$|y[n]| < \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]||x[n-m]| < K \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| < \infty$$

必要性の証明(Proof of the necessity)

対偶を証明する。つまり、$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$ならば、システムはBIBO安定でない。

Proof the contraposition: the system is not BIBO-stable if $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$ holds.

以下の入力信号を考える。(Consider the following input:)

$$x[n] = \begin{cases} \overline{h[-n]}/|h[-n]| & \text{for } h[-n] \neq 0, \\ 0 & \text{for } h[-n] = 0 \end{cases}$$

定義から、この入力は有界である。(The definition implies that this input is bounded.)

$$y[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| = \infty \qquad \blacksquare$$

BIBO安定性(BIBO-stability)

系10.1 Corollary 10.1

システムがBIBO安定であるための必要十分条件は、$\{h[n]\}$のZ変換$H(z)$の収束域が、単位円$|z|=1$を含むことである。

The system is BIBO-stable if and only if the unit circle $|z|=1$ is included into the region of convergence (ROC) for the Z-transform $H(z)$ of $\{h[n]\}$.

証明(Proof)

収束域の定義から、$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$である。

The definition of ROC implies $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$. ■

零点と極 Zeros and poles

$H(z)=0\ (1/H(z)=0)$を満たすzを$H(z)$の零点(極)と呼ぶ。

Points z are called zeros (poles) of $H(z)$ if $H(z)=0$ $(1/H(z)=0)$ holds.

定理10.3 Theorem 10.3

因果的システムがBIBO安定であるための必要十分条件は、$H(z)$のすべての極が単位円$|z|=1$の内側に含まれることである。

The causal system is BIBO-stable if and only if all poles of $H(z)$ are included in the unit open disk.

証明(Proof)

BIBO安定 BIBO-stable $\overset{\text{系10.1 Corollary 10.1}}{\Longleftrightarrow}$ $\{z:|z|=1\}\subset \mathrm{ROC}$ $\overset{\text{性質9.1 Property 9.1}}{\Longrightarrow}$ $\{z:|z|\geq 1\}\subset \mathrm{ROC}$

$\{z:|z|=1\}\subset \mathrm{ROC}$ $\overset{\text{自明(Trivial)}}{\Longleftarrow}$ $\{z:|z|\geq 1\}\subset \mathrm{ROC}$ ■

IIRシステムの例(Example of an IIR system)

例10.2(Example 10.2)

例10.1のIIRシステムがBIBO安定かどうかを判定せよ。

Decide whether the IIR system in Example 10.1 is BIBO-stable.

$$y[n] = x[n] + \frac{3}{2} y[n-1], \qquad y[n] = 0 \text{ for } n < 0$$

性質9.4を使って、両辺をZ変換すると、

Use Property 9.4 to evaluate the Z-transforms of both sides.

$$Y(z) = X(z) + \frac{3}{2} z^{-1} Y(z) \qquad \therefore Y(z) = H(z)X(z), \qquad H(z) = \frac{2}{2 - 3z^{-1}}$$

$H(z)$は単位円の外側に極$z = 3/2$を持つため、定理10.3からシステムはBIBO安定ではない。

Since $H(z)$ has a pole $z = 3/2$ outside the unit disk, Theorem 10.3 implies that the system is not BIBO-stable.

IIRシステムの例(Example of an IIR system)

例１０.３(Example 10.3)

次のIIRシステムがBIBO安定になるように、実フィードバック係数$K \in \mathbb{R}$を定めよ。

Determine the real feedback factor $K \in \mathbb{R}$ to BIBO-stabilize the following IIR system:

$$y[n] = x[n] + \frac{3}{2}y[n-1] - Ky[n-2], \qquad y[n] = 0 \text{ for } n < 0$$

性質９.４を使って、両辺をZ変換すると、

Use Property 9.4 to evaluate the Z-transforms of both sides.

$$Y(z) = X(z) + \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) - Kz^{-2}Y(z)$$

$$\therefore Y(z) = \frac{2}{Q(z)}X(z),$$

$$Q(z) = 2 - 3z^{-1} + 2Kz^{-2}$$

$Q(z)$の零点が単位円の内側にあれば、システムはBIBO安定である。

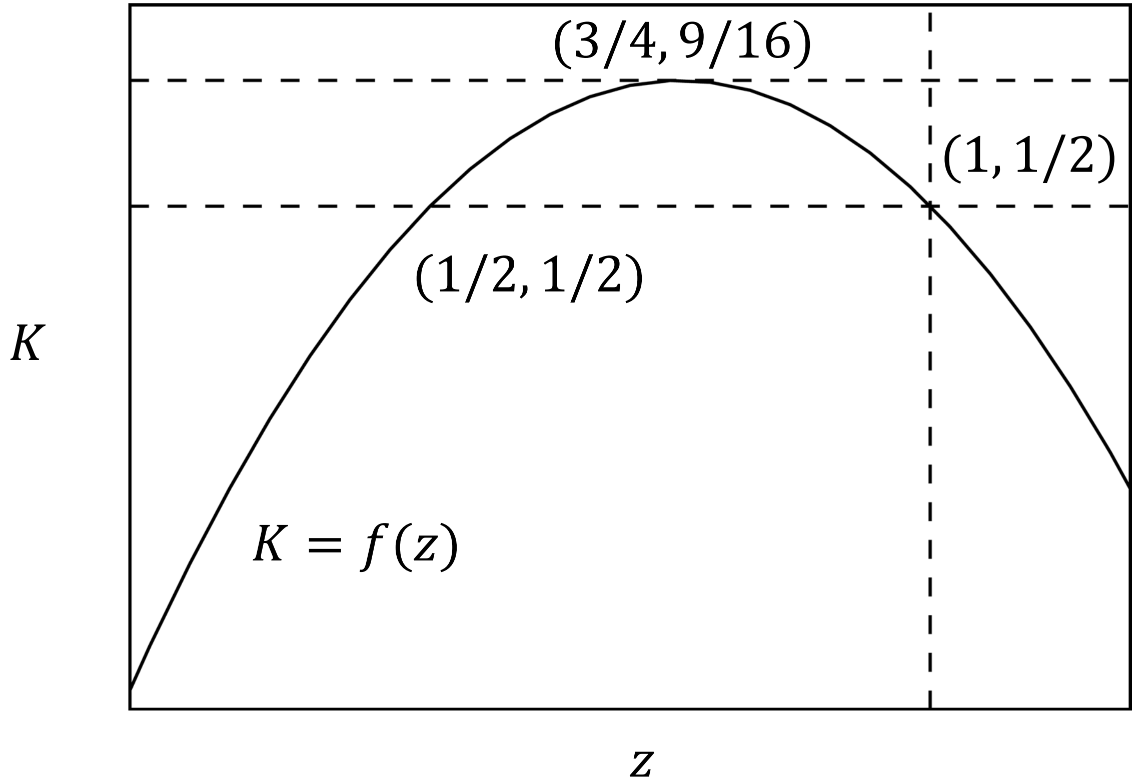
The system is BIBO-stable if all zeros of $Q(z)$ are in the unit open disk.

$Q(z) = 0$をKに関して解くと、(Solve $Q(z) = 0$ with respect to K.)

$$K = \frac{3z^{-1} - 2}{2z^{-2}} = \frac{3}{2}z - z^2 \equiv f(z)$$

IIRシステムの例(Example of an IIR system)

零点zが実数の場合(Case of real zeros z)



実零点zが区間$(-1, 1)$に含まれるのは、$1/2 < K \leq 9/16$のとき

Real zeros are included into the interval $(-1, 1)$ for $1/2 < K \leq 9/16$.

IIRシステムの例(Example of an IIR system)

零点zが複素数の場合(Case of complex zeros z)

$r \in (0,1)$ かつ$\theta \in (0,\pi)$に対して零点を$z = re^{\pm j\theta}$とおく。

Let $z = re^{\pm j\theta}$ denote zeros for $r \in (0,1)$ and $\theta \in (0,\pi)$.

$$K = \frac{3}{2}re^{\pm j\theta} - r^2 e^{\pm j2\theta} = \frac{3}{2}r\cos\theta - r^2\cos 2\theta \pm jr\left(\frac{3}{2}\sin\theta - r\sin 2\theta\right)$$

$\Im[K] = 0$なので、

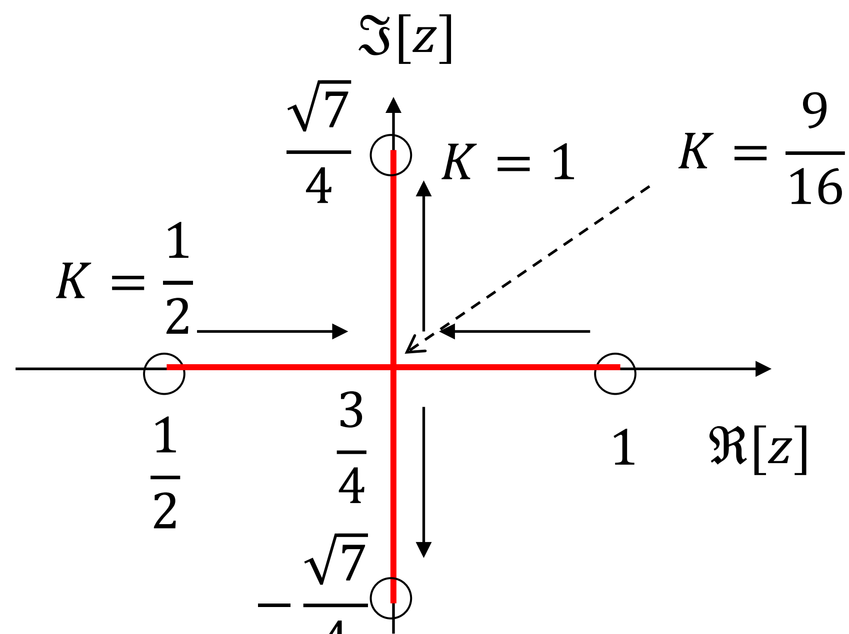
$\Im[K] = 0$ implies

$$r\cos\theta = \frac{3}{4} \qquad \text{for } r \geq \frac{3}{4}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$K = \frac{3}{2}r\cos\theta - r^2\cos 2\theta$$

$$= \frac{9}{8} - r^2\left(2\frac{9}{16r^2} - 1\right) = r^2$$

$$\therefore \frac{9}{16} \leq K < 1$$



答え(Answer)

$$\frac{1}{2} < K < 1$$

演習(Exercises)

次のIIRシステムがBIBO安定になるように、実係数$a \in \mathbb{R}$を定めよ。

Determine the real coefficient $a \in \mathbb{R}$ to BIBO-stabilize the following IIR system:

$$y[n] = x[n] - ay[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2], \qquad y[n] = 0 \text{ for } n < 0$$