信号解析論

Signal Processing

第12回講義資料

Lecture notes 12

離散フーリエ変換

Discrete Fourier transform

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授　竹内啓悟

Associate Professor　Keigo Takeuchi

復習と今日の目標(Review and today's goal)

時間領域信号 Time-doman signals	周波数領域信号 Frequency-domain signals	変換の種類 Transforms
ℝ上で連続時間 Continuous time on ℝ	ℝ上で連続周波数 Continuous on ℝ	フーリエ変換 Fourier transform
周期的かつ連続時間 Periodic and continuous time	離散(加算無限) Discrete (countably infinite)	フーリエ級数 Fourier series
離散(加算無限) Discrete (countably infinite)	周期的かつ連続周波数 Periodic and continuous frequency	離散時間フーリエ変換 (フーリエ級数) Discrete-time Fourier transform (Fourier series)
周期的かつ離散 Periodic and discrete	周期的かつ離散 Periodic and discrete	離散フーリエ変換 Discrete Fourier transform

※離散時間フーリエ変換は、フーリエ級数で時間領域と周波数領域の役割を入れ替えたもの

Discrete-time Fourier transform means the Fourier series for which time and frequency domains are swapped.

時間・周波数領域で離散的な信号の取り扱いを学習する。

Learn the treatment of discrete signals in time and frequency domains.

フーリエ変換の復習(Review of the Fourier transform)

フーリエ変換(Fourier transform)

$x(t)$を無限区間 $\mathbb{R}$上の絶対可積分な連続時間信号とする。

Let $x(t)$ denote an absolutely integrable and continuous-time signal on the infinite interval $\mathbb{R}$.

$$\tilde{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi jft} dt, \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(f) e^{2\pi jft} df$$

ディラックのデルタ関数(Dirac delta function)

任意の関数$f(t)$に対して、(For any function $f(t)$,)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) f(\tau) d\tau = f(t)$$

デルタ関数のフーリエ変換(Fourier transform of the delta function)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-2\pi jft} dt = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi jft} df = \delta(t)$$

フーリエ級数の復習(Review of the Fourier series)

複素フーリエ級数(Complex Fourier series)

$x(t)$を周期Tの２乗可積分な連続時間信号とする。

Let $x(t)$ denote a square-integrable and continuous-time signal of period T.

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{2\pi jkt/T}, \qquad X[k] = \int_{-\epsilon}^{T-\epsilon} x(t)e^{-2\pi jkt/T}dt$$

$$0 < \epsilon \ll 1$$

直交性(Orthogonality)

整数$n \in \mathbb{Z}$に対して、

For any integer $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{T}\int_{-\epsilon}^{T-\epsilon} e^{2\pi jnt/T}\,dt = \delta_{n,0}, \qquad \delta_{n,0} = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

クロネッカーのデルタ(Kronecker delta)

確認(Confirmation)

$$\int_{-\epsilon}^{T-\epsilon} x(t)e^{-2\pi jkt/T}dt = \sum_{k'=-\infty}^{\infty}\frac{X[k']}{T}\int_{-\epsilon}^{T-\epsilon} e^{2\pi j(k'-k)t/T}dt = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} X[k']\delta_{k'-k,0}$$

$$= X[k]$$

周期信号のフーリエ変換(Fourier transform of period signals)

フーリエ変換(Fourier transform)

周期Tを持つ連続時間信号$x(t)$のフーリエ変換$\tilde{X}(f)$は以下で与えられる。

The Fourier transform $\tilde{X}(f)$ of a continuous-time signal $x(t)$ with period T is given by

$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta\left(\frac{k}{T} - f\right), \qquad X[k] = \int_{-\epsilon}^{T-\epsilon} x(t) e^{-2\pi jkt/T} dt$$

証明(Proof)

$x(t)$は複素フーリエ級数展開できる。($x(t)$ has the complex Fourier series.)

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{2\pi jkt/T}$$

デルタ関数のフーリエ変換公式を使って、両辺をフーリエ変換すると、

Evaluate the Fourier transform of both sides by using the Fourier transform formula of the delta function.

$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j(k/T-f)t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta\left(\frac{k}{T} - f\right) \quad \blacksquare$$

離散時間フーリエ変換(Discrete-time Fourier transform)

離散時間フーリエ変換(Discrete-time Fourier transform)

$X\left(e^{2\pi jf}\right)$を周期$f_s$の2乗可積分な連続周波数信号とする。

Let $X\left(e^{2\pi jf}\right)$ denote a square-integrable and continuous-frequency signal of period f_s.

$$X\left(e^{2\pi jf}\right) = \frac{1}{f_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi jnf/f_s}, \qquad x[n] = \int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} X\left(e^{2\pi jf}\right) e^{2\pi jnf/f_s} df$$

$X\left(e^{2\pi jf}\right)$を信号$\{x[n]\}$の離散時間フーリエ変換と呼ぶ。

$X\left(e^{2\pi jf}\right)$ is called discrete-time Fourier transform of $\{x[n]\}$.

注意　$f_s = 1$の場合、離散時間フーリエ変換は$\{x[n]\}$の周波数応答に等しい。

Remarks　The discrete-time Fourier transform is equivalent to the frequency response of $\{x[n]\}$ for $f_s = 1$.

サンプリング周期を$T_s = 1/f_s$として、$x(nT_s) = x[n]$と定義すると、

For sampling period $T_s = 1/f_s$, define $x(nT_s) = x[n]$.

$$X\left(e^{2\pi jf}\right) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-2\pi j(nT_s)f} \to \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi jtf} dt \quad (f_s \to \infty)$$

連続時間信号$x(t)$を周期T_sでサンプルしたときのフーリエ変換に相当する。

Corresponds to the Fourier transform computed via sampling of a continuous-time signal $x(t)$ with period T_s.

離散時間フーリエ変換の畳み込み(Convolution of the Discrete-time Fourier transforms)

定理12.1
Theorem 12.1

$\{x[n]\}$、$\{y[n]\}$、$\{z[n]=x[n]y[n]\}$の離散時間フーリエ変換をそれぞれ$X(e^{2\pi jf})$、$Y(e^{2\pi jf})$、$Z(e^{2\pi jf})$とすると、

Let $X(e^{2\pi jf})$, $Y(e^{2\pi jf})$, and $Z(e^{2\pi jf})$ denote the discrete-time Fourier transforms of $\{x[n]\}$, $\{y[n]\}$, and $\{z[n]=x[n]y[n]\}$, respectively. Then,

$$Z(e^{2\pi jf}) = \int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} X(e^{2\pi jf'})Y\left(e^{2\pi j(f-f')}\right) df'$$

証明
Proof

$$z[n] = \int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} \left\{\int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} X(e^{2\pi jf'})Y\left(e^{2\pi j(f-f')}\right) df'\right\} e^{2\pi jnf/f_s} df$$

$$= \int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} X(e^{2\pi jf'}) df' \int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} Y\left(e^{2\pi j(f-f')}\right) e^{2\pi jnf/f_s} df$$

$$= \int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} X(e^{2\pi jf'}) e^{2\pi jnf'/f_s} df' \int_{-\epsilon-f'}^{f_s-\epsilon-f'} Y(e^{2\pi jf})\, e^{2\pi jnf/f_s} df$$

$$= \int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} X(e^{2\pi jf'}) e^{2\pi jnf'/f_s} df' \int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} Y(e^{2\pi jf})\, e^{2\pi jnf/f_s} df = x[n]y[n]$$

$\because Y(e^{2\pi jf})e^{2\pi jnf/f_s}$は周期$f_s$(The period of $Y(e^{2\pi jf})e^{2\pi jnf/f_s}$ is f_s.) ■

離散フーリエ変換の導出(Derivation of the discrete Fourier transform)

周期的な連続時間信号のサンプリング(Sampling of a periodic and continuous-time signal)

周期Tの連続時間信号$x(t)$のフーリエ変換$\tilde{X}(f)$は、以下で書ける。

The Fourier transform $\tilde{X}(f)$ of a continuous-time signal $x(t)$ with period T can be represented as

$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta\left(\frac{k}{T} - f\right), \qquad X[k] = \int_{-\epsilon}^{T-\epsilon} x(t)e^{-2\pi jkt/T}dt$$

$x(t)$をサンプリング周期T_sで量子化した$x[n] = x(nT_s)$から$X[k]$を近似する。

Approximate $X[k]$ from the quantization $x[n] = x(nT_s)$ of $x(t)$ with sampling period T_s.

$$X[k] \approx \sum_{n=0}^{T/T_s-1} x(nT_s)e^{-2\pi jknT_s/T}T_s = T_s\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi jkn/N}, \qquad N = \frac{T}{T_s}$$

一方、$\tilde{X}(f)$を$\{x[n]\}$の離散時間フーリエ変換とみなすと、

On the other hand, regard $\tilde{X}(f)$ as the discrete-time Fourier transform of $\{x[n]\}$.

$$x[n] \approx \int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} \tilde{X}(f)e^{2\pi jnf/f_s}df = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\int_{-\epsilon}^{f_s-\epsilon} \delta\left(\frac{k}{T} - f\right)e^{2\pi jnf/f_s}df$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{Tf_s-1} X[k]e^{2\pi jnk/(Tf_s)} = \frac{1}{T_sN}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{2\pi jnk/N}$$

正規化周波数(Normalized frequency)

$F = f/f_s$とし、周波数の単位を無次元化する。 ⇨ $f_s = 1/T_s = 1$とする。

Nondimensionalize the unit of frequency by letting $F = f/f_s$. Set $f_s = 1/T_s = 1$.

離散フーリエ変換(Discrete Fourier transform)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi jkn/N}, \qquad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{2\pi jnk/N}$$

一対一対応の確認(Confirmation of the one-to-one correspondence)

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{2\pi jnk/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] e^{2\pi j(n-n')k/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi j(n-n')k/N} = \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] \delta_{n-n',0} = x[n]$$

∵ 次ページの補題12.1(Due to Lemma 12.1 in the next page) ■

補題(Lemma)

補題12.1(Lemma 12.1)

整数$n \in \mathbb{Z}$に対して、

For any integer $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi jnk/N} = \delta_{n,0}$$

証明(Proof)

$n = 0$の場合、

For $n = 0$,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi jnk/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1$$

$n \neq 0$の場合、等比級数の公式から

For $n' \neq 0$, the geometric series formula implies

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi jnk/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{2\pi jn/N}\right)^k = \frac{1}{N}\frac{1-e^{2\pi jn}}{1-e^{2\pi jn/N}} = 0 \qquad \blacksquare$$

周期的な離散時間信号の畳み込み(Convolution of periodic and discrete-time signals)

畳み込み(Convolution)

$\{y[n]\}$を周期Nの離散時間信号として、

Let $\{y[n]\}$ denote discrete-time signals with period N.

$$(x \otimes y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m]$$

定理１２.２(Theorem 12.2)

$\{x[n]\}$と$\{y[n]\}$の離散フーリエ変換をそれぞれ$X[k]$と$Y[k]$とする。
畳み込み$\{(x \otimes y)[n]\}$の離散フーリエ変換は、$X[k]Y[k]$に等しい。

Let $X[k]$ and $Y[k]$ denote the discrete Fourier transforms of $\{x[n]\}$ and $\{y[n]\}$, respectively. Then, the discrete Fourier transform of the convolution $\{(x \otimes y)[n]\}$ is equal to $X[k]Y[k]$.

注意(Remark)

定理１２.２は直交周波数分割多重(OFDM)方式の実装に応用された。

Theorem 12.2 was applied to the implementation of orthogonal frequency-division multiplexing (OFDM).

定理12.2の証明(Proof of Theorem 12.2)

畳み込み $\{(x \otimes y)[n]\}$ の離散フーリエ変換を評価する。

Evaluate the discrete Fourier transform of the convolution $\{(x \otimes y)[n]\}$.

$$\sum_{n=0}^{N-1}(x \otimes y)[n]e^{-2\pi jkn/N} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m]\,e^{-2\pi jkn/N}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-2\pi jkm/N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n-m]e^{-2\pi jk(n-m)/N}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-2\pi jkm/N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n]e^{-2\pi jkn/N} = X[k]Y[k]$$

$$\because\ y[n-m] = y[N+n-m]$$

$$e^{-2\pi jk(n-m)/N} = e^{-2\pi jk(N+n-m)/N} \qquad \blacksquare$$

パーセバルの定理(Parseval's theorem)

定理12.3(Theorem 12.3)

離散時間信号$\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$とその離散フーリエ変換$X[k]$に対して、

For discrete-time signals $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ and the corresponding discrete Fourier transform $X[k]$,

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X[k]|^2$$

証明(Proof)

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X[k]|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-2\pi jkn/N}\sum_{n'=0}^{N-1}\overline{x[n']}e^{2\pi jkn'/N}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sum_{n'=0}^{N-1}\overline{x[n']}\sum_{k=0}^{N-1}e^{2\pi jk(n'-n)/N}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sum_{n'=0}^{N-1}\overline{x[n']}\,\delta_{n'-n,0}=\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2$$

∵ 補題12.1
Lemma 12.1

■

高速フーリエ変換(Fast Fourier transform)

定理12.4(Theorem 12.4)

$N=2^M$とする。$\{x[n]\}$の離散フーリエ変換は、$\mathcal{O}(N\log_2 N)$時間で計算できる。

Let $N=2^M$. The discrete Fourier transform of $\{x[n]\}$ can be computed in $\mathcal{O}(N\log_2 N)$ time.

証明(Proof)

離散フーリエ変換を偶数番と奇数番に関する総和に分ける。

Decompose the discrete Fourier transform into two terms for even and odd indices.)

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]e^{-2\pi jk(2n)/N}+\sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]e^{-2\pi jk(2n+1)/N}$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]e^{-2\pi jkn/(N/2)}}_{=E[k]}+e^{-2\pi jk/N}\underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]e^{-2\pi jkn/(N/2)}}_{=O[k]}$$

$\{x[2n]\}_{n=0}^{N/2-1}$の離散フーリエ変換

Discrete Fourier transform of $\{x[2n]\}_{n=0}^{N/2-1}$

$\{x[2n+1]\}_{n=0}^{N/2-1}$の離散フーリエ変換

Discrete Fourier transform of $\{x[2n+1]\}_{n=0}^{N/2-1}$

$\{X[k]\}_{k=0}^{N/2-1}$は計算できる。($\{X[k]\}_{k=0}^{N/2-1}$ is computable.)

証明(Proof)

$\{X[k]\}_{k=N/2}^{N-1}$も$\{E[k]\}$と$\{O[k]\}$から計算できる。

$\{X[k]\}_{k=N/2}^{N-1}$ are also computable from $\{E[k]\}$ and $\{O[k]\}$.

$$E\left[k+\frac{N}{2}\right]=\sum_{n=0}^{N/2-1}x[2n]e^{-2\pi j(k+N/2)n/(N/2)}=\sum_{n=0}^{N/2-1}x[2n]e^{-2\pi jkn/(N/2)}\,e^{-2\pi jn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}x[2n]e^{-2\pi jkn/(N/2)}=E[k]$$

同様に、

Similarly,

$$O\left[k+\frac{N}{2}\right]=\sum_{n=0}^{N/2-1}x[2n+1]e^{-2\pi j(k+N/2)n/(N/2)}=O[k]$$

よって(Thus,)

$$X\left[k+\frac{N}{2}\right]=E\left[k+\frac{N}{2}\right]+e^{-2\pi j(k+N/2)/N}O\left[k+\frac{N}{2}\right]=E[k]-e^{-2\pi jk/N}O[k]$$

TOYOHASHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

証明(Proof)

2^m点の離散フーリエ変換は、2^{m-1}点の離散フーリエ変換を2回計算することで、計算可能であることを証明した。

We have proved that 2^m-point discrete Fourier transform can be computed via two 2^{m-1}-point discrete Fourier transforms.

計算量(Complexity)

この分割処理を繰り返すことで、2^M点の離散フーリエ変換を計算する。

Compute the 2^M-point discrete Fourier transform via the repetition of this decomposition.

c_mを2^m点の離散フーリエ変換の計算量とすると、$A > 0$を定数として

Let c_m denote the complexity of the 2^m-point discrete Fourier transform. For a constant $A > 0$,

$$c_m = 2c_{m-1} + A2^m$$

$c_m = 2^m \tilde{c}_m$とおくと、

Let $c_m = 2^m \tilde{c}_m$.

$$\tilde{c}_m = \tilde{c}_{m-1} + A \qquad \therefore\ \tilde{c}_m = Am + \tilde{c}_0$$

よって(Thus,)

$$c_M = 2^M(AM + \tilde{c}_0) = \mathcal{O}(2^M M) = \mathcal{O}(N \log_2 N) \qquad \blacksquare$$

演習(Exercises)

次の離散時間信号の離散フーリエ変換を計算せよ。

Compute the discrete Fourier transform of the following discrete-time signals:

$$x[n] = a^n \ \text{ for } n = 0, \dots, N-1$$