

信号解析論

Signal Processing

第13回講義資料

Lecture notes 13

スペクトル解析と窓関数

Spectral analysis and window functions

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授 竹内啓悟

Associate Professor Keigo Takeuchi

スペクトル解析(Spectral analysis)

今日の目標(Today's goal)

以下の連続時間信号 $x(t)$ の周波数特性を周期 T_s でサンプリングすることによって解析する。

Analyze the frequency response of the following continuous-time signal $x(t)$ via sampling with period T_s .

$$x(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \quad x(0) = 0$$

真の周波数特性(True frequency response)

$$\tilde{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi jft} dt = \begin{cases} 1 & \text{for } |f| \leq 1/2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(f)e^{2\pi jft} df = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi jft} df = 2 \int_0^{1/2} \cos 2\pi ft df = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

解析における前提(Assumptions in analysis)

- $x(t)$ がどんな信号かは事前にわからない。(We have no information on $x(t)$ in advance.)
- ナイキスト周波数 $f_N = 1/(2T_s)$ 以上の周波数成分は $x(t)$ に存在しない。
 $x(t)$ contains no signals with frequency higher than the Nyquist frequency $f_N = 1/(2T_s)$.

素朴な方法(Naïve method)

有限サンプリング(Finite sampling)

サンプリング周期 T_s で $x(t)$ を量子化する。(Quantize $x(t)$ with sampling period T_s .)

$$x[n] = x\left(\left(n - \frac{N}{2}\right)T_s\right) \text{ for } n = 0, \dots, N - 1$$

離散フーリエ変換(Discrete Fourier transform)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi jkn/N}$$

スペクトル解析(Spectral analysis)

$x(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{X}(f)$ の推定値 $\hat{X}(f)$ を以下とする。

Define an estimate $\hat{X}(f)$ of the Fourier transform $\tilde{X}(f)$ of $x(t)$ as

$$\hat{X}\left(\frac{k}{NT_s}\right) = T_s X[k]$$

N を大きくすると、周波数の解像度が上がる。

The resolution of frequency increases as N grows.

一 致 性 (Consistency)

定理 13.1 (Theorem 13.1)

極限 $T_s \rightarrow 0, NT_s \rightarrow \infty$ において、

In the limit $T_s \rightarrow 0$ and $NT_s \rightarrow \infty$,

$$\hat{X}(f) \rightarrow \tilde{X}(f)$$

証明 (Proof)

12回講義資料 p. 8 から、極限 $T_s \rightarrow 0$ において、

From the lecture notes 12, p. 8, we find that as $T_s \rightarrow 0$,

$$T_s X[k] \rightarrow \int_{-\epsilon}^{T-\epsilon} x(t) e^{-2\pi jkt/T} dt$$

よって (Thus,)

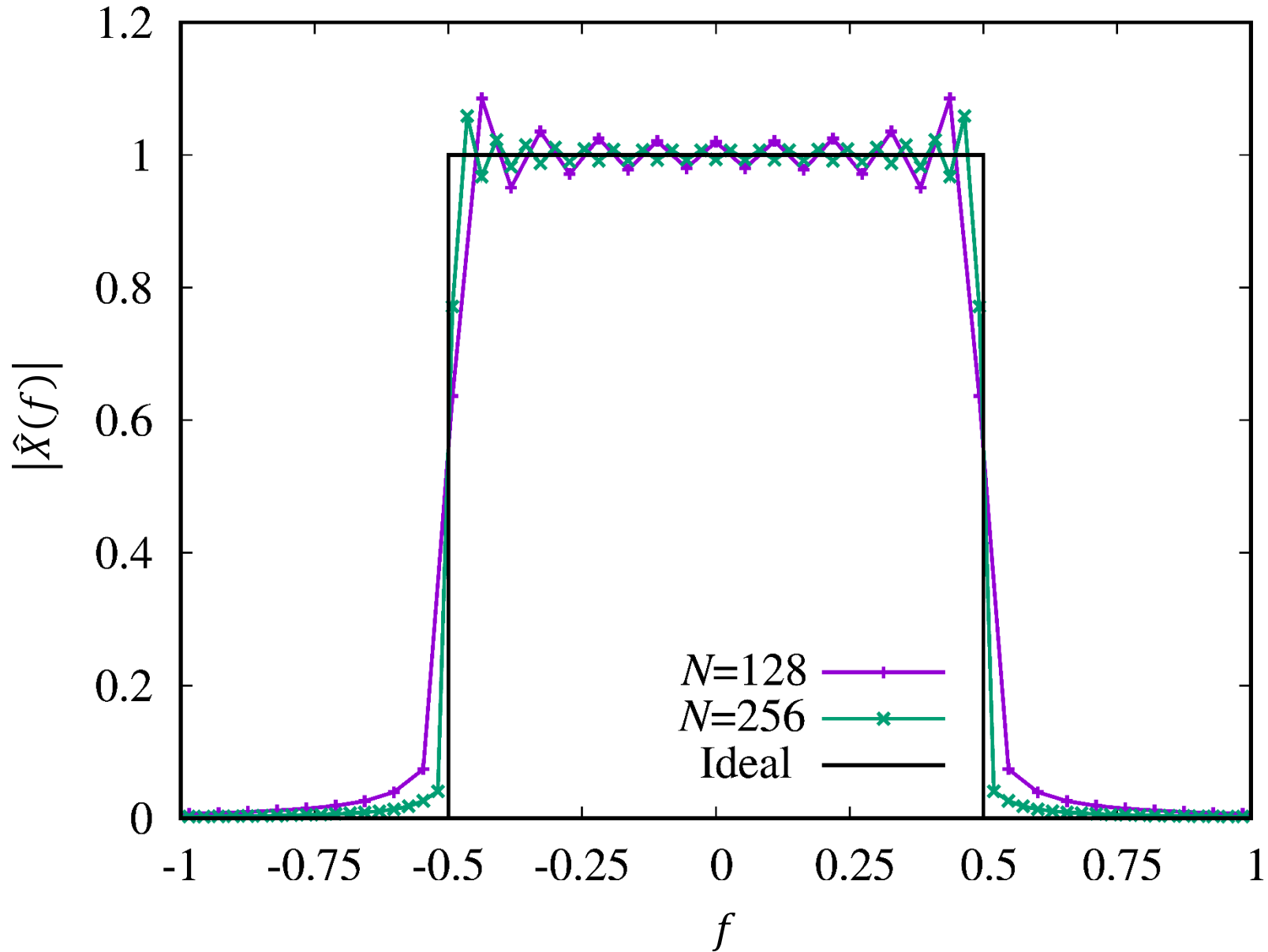
$$\frac{1}{NT_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_s X[k] \delta\left(\frac{k}{NT_s} - f\right) \rightarrow \tilde{X}(f)$$

$\hat{X}(k/(NT_s)) = T_s X[k]$ とおくと、極限 $T_s \rightarrow 0, NT_s \rightarrow \infty$ において、

Let $\hat{X}(k/(NT_s)) = T_s X[k]$. In the limit $T_s \rightarrow 0$ and $NT_s \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{NT_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_s X[k] \delta\left(\frac{k}{NT_s} - f\right) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f') \delta(f' - f) df' = \hat{X}(f) \quad \blacksquare$$

$T_s = 1/7$ に対する素朴なスペクトル解析(Naïve spectral analysis for $T_s = 1/7$)



矩形窓による解釈(Interpretation via the rectangular window)

離散時間フーリエ変換(Discrete-time Fourier transform)

信号 $x_w[n] = w[n]x[n]$ の離散時間フーリエ変換を $X_w(f)$ とする。

Let $X_w(f)$ denote the discrete-time Fourier transform of $x_w[n] = w[n]x[n]$.

$$X_w(e^{2\pi jf}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]x[n]e^{-2\pi jfn}, \quad f_s = 1$$

矩形窓

Rectangular window

$$w[n] = w\left(\frac{n}{N-1}\right), \quad w(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

素朴な方法

Naïve method

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]x[n]e^{-2\pi jkn/N} = X_w(k/N)$$

$X[k]$ は離散時間フーリエ変換 $X_w(e^{2\pi jf})$ の $f = k/N$ でのサンプル値とみなせる。

$X[k]$ is regarded as a sample at $f = k/N$ of the discrete-time Fourier transform $X_w(e^{2\pi jf})$.

解釈

有限サンプリングは、時間領域で信号 $x[n]$ を $x_w[n]$ に歪ませている。

Interpretation

In finite sampling, the time-domain signal $x[n]$ is distorted to $x_w[n]$.

周波数領域における歪み(Distortion in frequency domain)

周波数領域における畳み込み(Convolution in frequency domain)

$\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 、 $\{w[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 、 $\{x_w[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ の離散時間フーリエ変換をそれぞれ $X(e^{2\pi jf})$ 、 $W(e^{2\pi jf})$ 、 $X_w(e^{2\pi jf})$ とする。

Let $X(e^{2\pi jf})$, $W(e^{2\pi jf})$, and $X_w(e^{2\pi jf})$ denote the discrete-time Fourier transforms of $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{w[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$, and $\{x_w[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$, respectively.

定理12.1より

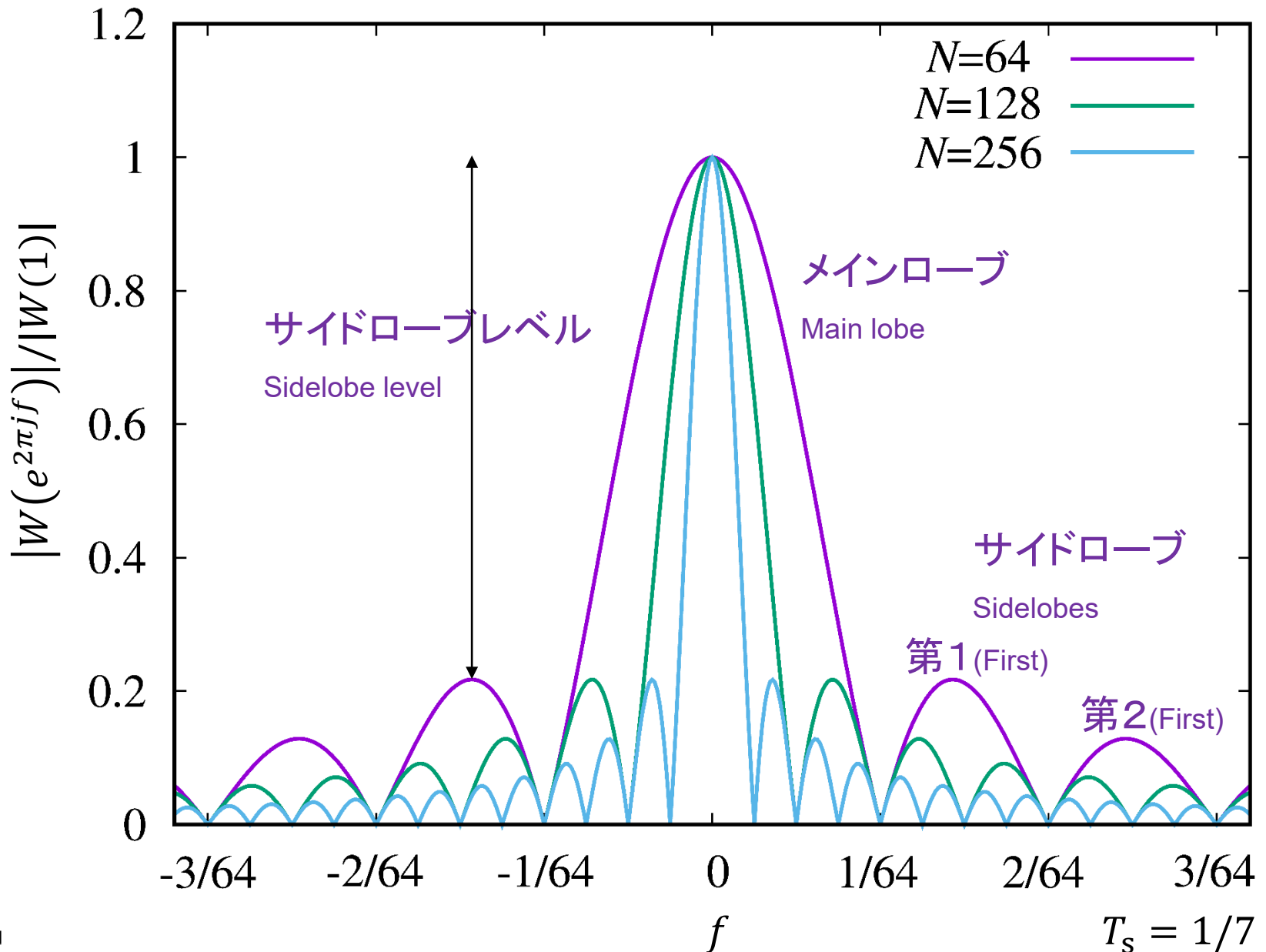
$$X_w(e^{2\pi jf}) = \int_{-\epsilon}^{1-\epsilon} W(e^{2\pi jf'}) X(e^{2\pi j(f-f')}) df'$$

From Theorem 12.1,

矩形窓の離散時間フーリエ変換(Discrete-time Fourier transform of the rectangular window)

$$\begin{aligned} W(e^{2\pi jf}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] e^{-2\pi jnf} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-2\pi jf})^n = \frac{1 - e^{-2\pi jfN}}{1 - e^{-2\pi jf}} \\ &= \frac{e^{-\pi jfN} e^{\pi jfN} - e^{-\pi jfN}}{e^{-\pi jf} e^{\pi jf} - e^{-\pi jf}} = e^{-\pi j(N-1)f} \frac{\sin \pi Nf}{\sin \pi f} \quad \text{for } f \neq 0 \\ W(1) &= \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N \end{aligned}$$

矩形窓の振幅特性 (Amplitude response of the rectangular window)



窓関数を用いたスペクトル解析(Spectral analysis by windowing)

窓関数を用いたサンプリング(Sampling with a window function)

サンプリング周期 T_s で $x(t)$ を量子化する。(Quantize $x(t)$ with sampling period T_s .)

$$x_w[n] = w\left(\frac{n}{N-1}\right) x\left(\left(n - \frac{N}{2}\right)T_s\right) \text{ for } n = 0, \dots, N-1$$

離散フーリエ変換(Discrete Fourier transform)

$$X_w[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_w[n] e^{-2\pi jkn/N}$$

スペクトル解析(Spectral analysis)

$x(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{X}(f)$ の推定値 $\hat{X}_w(f)$ を以下とする。

Define an estimate $\hat{X}_w(f)$ of the Fourier transform $\tilde{X}(f)$ of $x(t)$ as

$$\hat{X}_w\left(\frac{k}{NT_s}\right) = T_s X_w[k]$$

ハミング窓(Hamming window)

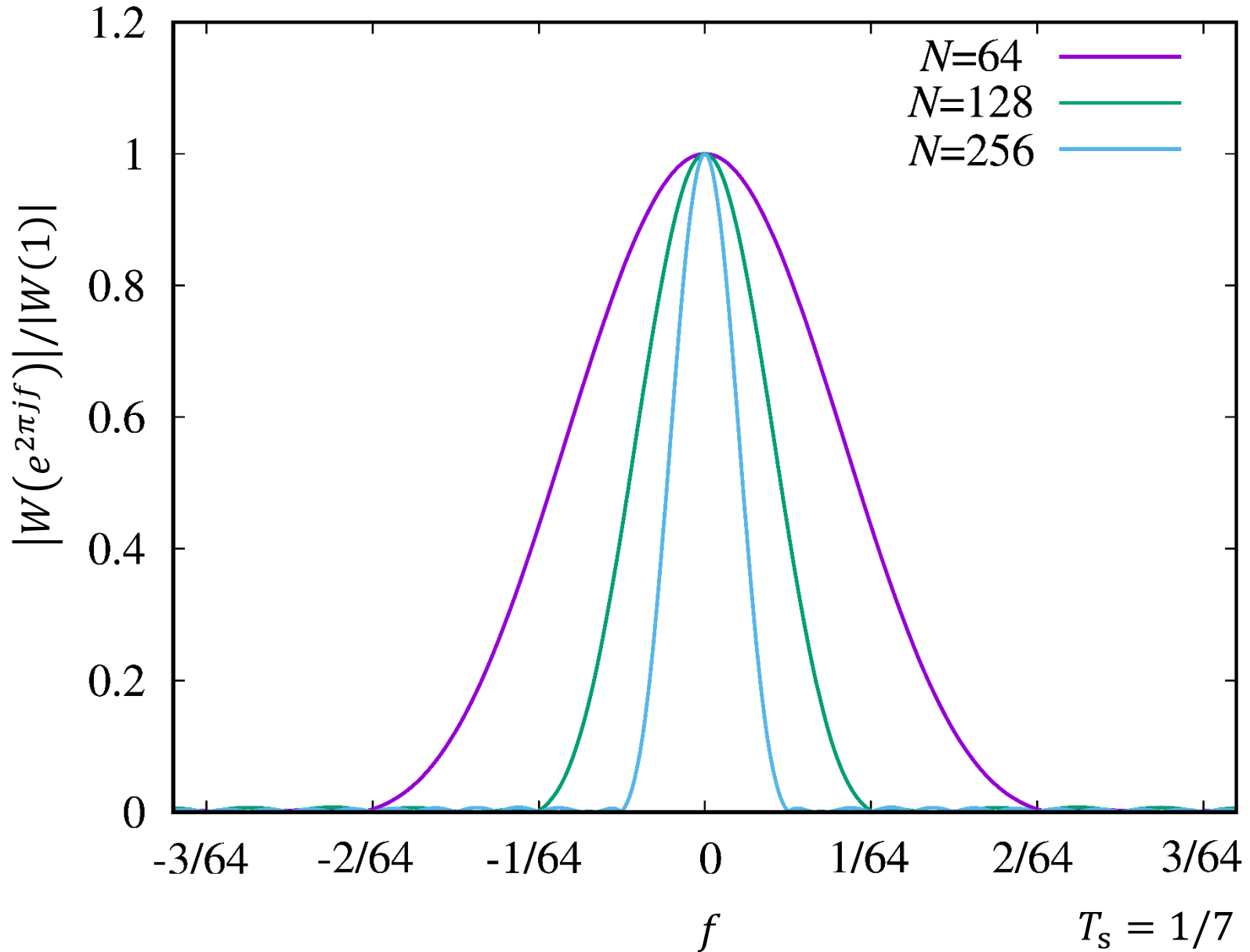
時間領域表現(Time-domain representation)

$$w(t) = \begin{cases} a - (1 - a) \cos 2\pi t & \text{for } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad a = 0.54$$

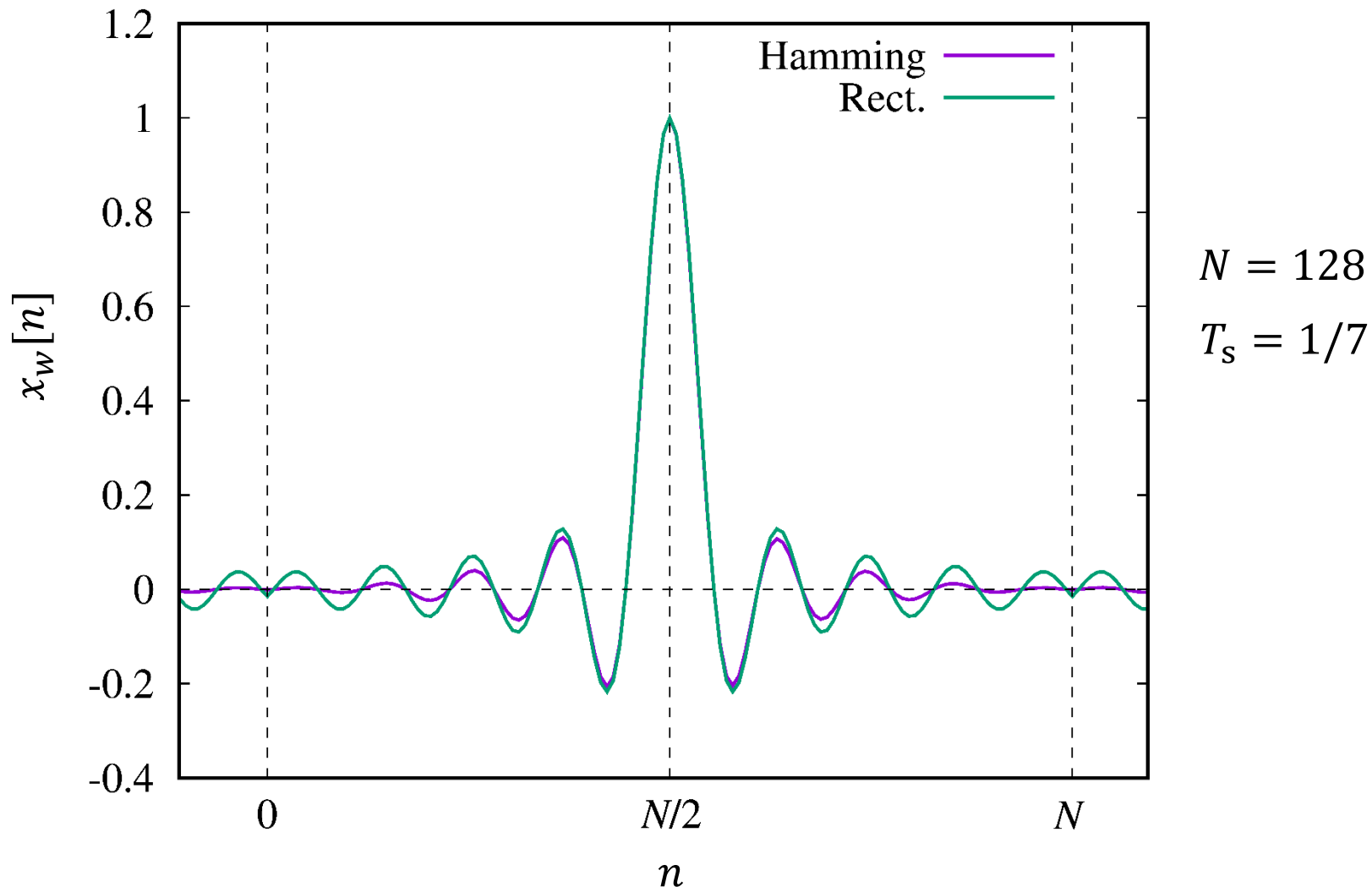
周波数領域表現(Frequency-domain representation)

$$\begin{aligned} W(e^{2\pi jf}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w\left(\frac{n}{N-1}\right) e^{-2\pi jfn} = \sum_{n=0}^{N-1} w\left(\frac{n}{N-1}\right) e^{-2\pi jfn} \\ &= a \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-2\pi jf})^n - (1-a) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{2\pi jn/(N-1)} + e^{-2\pi jn/(N-1)}}{2} e^{-2\pi jfn} \\ &= a \frac{1 - e^{-2\pi jfN}}{1 - e^{-2\pi jf}} - \frac{1-a}{2} \left(\frac{1 - e^{-2\pi jN\{f-1/(N-1)\}}}{1 - e^{-2\pi j\{f-1/(N-1)\}}} + \frac{1 - e^{-2\pi jN\{f+1/(N-1)\}}}{1 - e^{-2\pi j\{f+1/(N-1)\}}} \right) \\ &= e^{-\pi j(N-1)f} \left\{ a \frac{\sin \pi Nf}{\sin \pi f} + \frac{1-a}{2} \left[\frac{\sin \pi N \left(f - \frac{1}{N-1} \right)}{\sin \pi \left(f - \frac{1}{N-1} \right)} + \frac{\sin \pi N \left(f + \frac{1}{N-1} \right)}{\sin \pi \left(f + \frac{1}{N-1} \right)} \right] \right\} \end{aligned}$$

ハミング窓の周波数特性(Frequency response of the Hamming window)



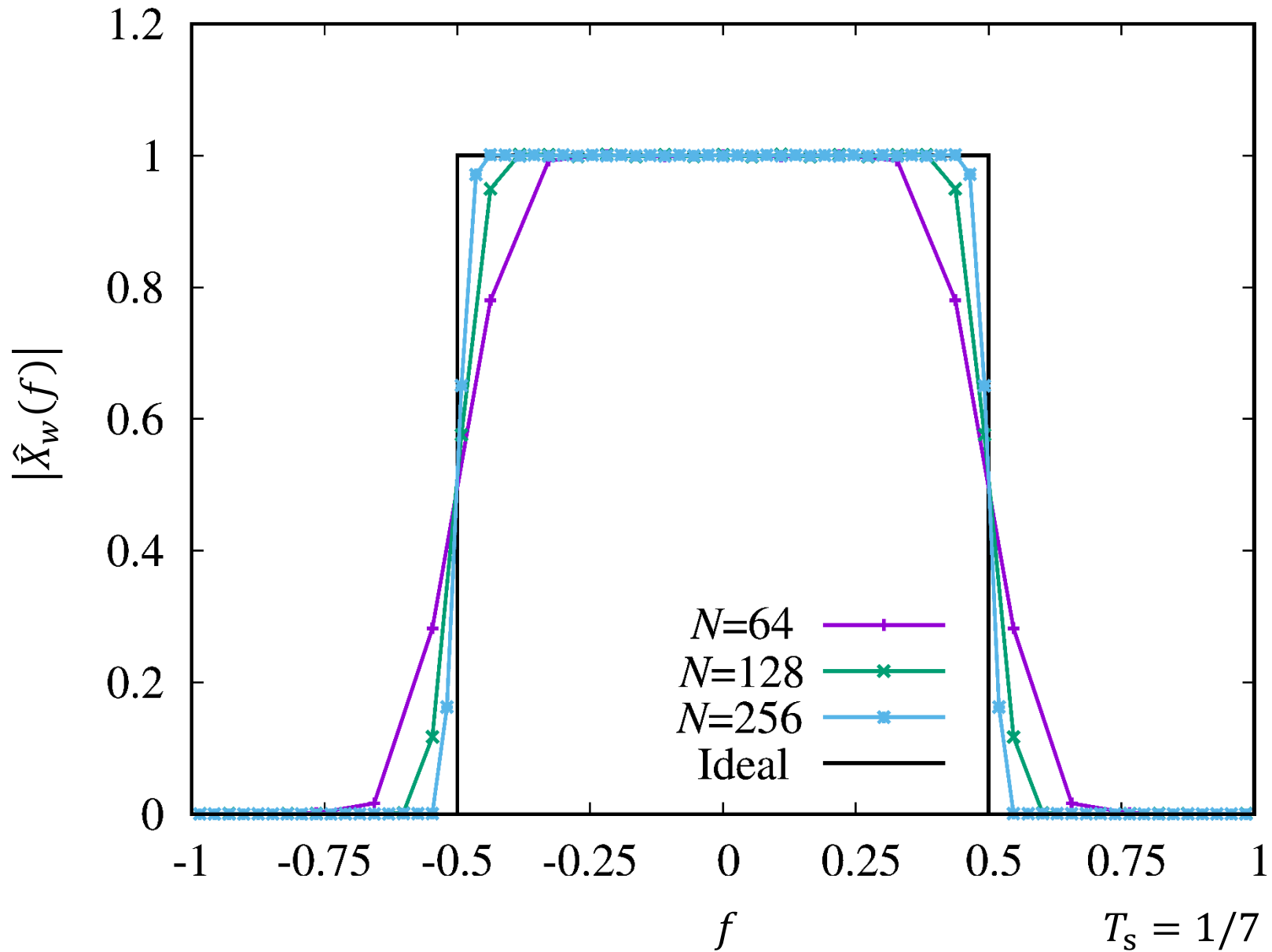
時間領域における滑らかさ(Smoothness in time domain)



歪みは生じるが、滑らかにつながる。

The signals are connected smoothly while they are distorted.

ハミング窓を用いたスペクトル解析 (Spectral analysis with the Hamming window)



演習(Exercises)

矩形窓に関する以下のパラメータを評価せよ。

Evaluate the following parameters for the rectangular window:

1. 第 k サイドローブのピーク位置 $f_k > 0$ (Peak positions $f_k > 0$ of the k th sidelobes)
2. サイドローブレベル[dB](Sidelobe level [dB])

$$10 \log_{10} \frac{|W(e^{2\pi j f_1})|^2}{|W(1)|^2}$$

3. 十分大きな N に対する近似的サイドローブレベル[dB]
Approximate sidelobe level [dB] for sufficiently large N .

以下の近似を用いよ。(Use the following approximation:)

$$\sin x \approx x \text{ for } |x| \ll 1$$