

信号解析論

Signal Processing

第14回講義資料

Lecture notes 14

デジタルフィルタの設計1

Design of digital filters 1

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授 竹内啓悟

Associate Professor Keigo Takeuchi

理想的低域通過フィルタの設計(Design of ideal low-pass filter)

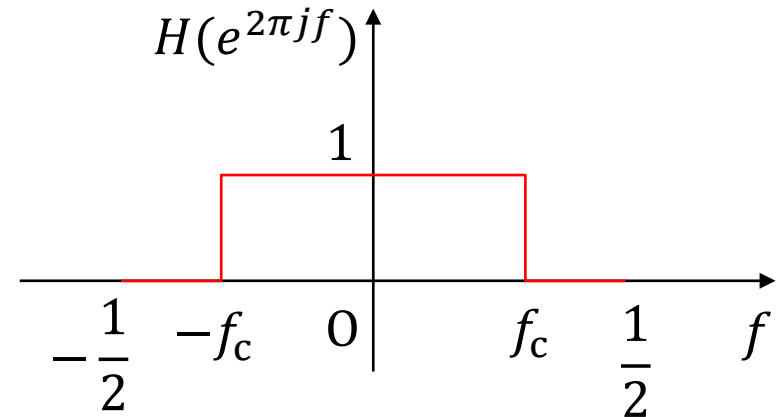
今日の目標(Today's goal)

以下の周波数特性を持つ理想的低域通過フィルタを設計する。

Design a digital filter that has the following ideal low-pass frequency response:

$$H(e^{2\pi jf}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |f| \leq f_c \\ 0 & \text{for } |f| \in (f_c, 1/2] \end{cases}$$

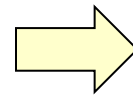
$f_c \in (0, 1/2]$: 遮断周波数(Cutoff frequency)



設計要求(Design requirements)

- 因果性(Causal)
- BIBO安定性(BIBO stability)
- 線形位相特性(Linear phase response)
- 通過/阻止帯域リップル

Passband/Stopband ripples



FIRフィルタで設計する。

Use an FIR filter.

FIRフィルタ(FIR filter)

非因果的FIRフィルタ(Non-causal FIR filter)

$$H_N^{\text{non}}(z) = \sum_{n=-N}^N h[n]z^{-n}, \quad h[n] \in \mathbb{R}$$

因果性を満たすように、時間シフトする。(Shift the time indices to satisfy the causality.)

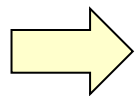
因果的FIRフィルタ(Causal FIR filter)

$$H_N(z) = \sum_{n=0}^{2N} h[n]z^{-n}, \quad h[n] \in \mathbb{R}$$

注意(Remarks)

因果的FIRフィルタ $H_N(z)$ は、定理10.2からBIBO安定である。

The causal FIR filter $H_N(z)$ is BIBO-stable from Theorem 10.2.



線形位相特性と通過/阻止帯域リップを考慮すればよい。

Sufficient to take linear phase response and passband/stopband ripples into account.

群遅延と線形位相特性の復習(Review of the group delay and linear phase response)

群遅延の定義(Definition of the group delay)

$H(e^{2\pi jf}) \neq 0$ を満たす f に対して、 $H(e^{2\pi jf}) = e^{2\pi jF(f)} |H(e^{2\pi jf})|$ と表現したとき、以下で定義される $\tau_g(f)$ を群遅延と呼ぶ。

For a frequency response $H(e^{2\pi jf}) = e^{2\pi jF(f)} |H(e^{2\pi jf})|$, the function $F(f)$ is called group delay.

$$\tau_g(f) = -\frac{d(2\pi F)}{d(2\pi f)} = -\frac{dF}{df}$$

※通常の群遅延は、 f ではなく、 $\omega = 2\pi f$ の関数として定義される。

The group delay is usually defined as a function of $\omega = 2\pi f$, rather than f .

線形位相特性(Linear phase response)

群遅延 $\tau_g(f)$ が定数のとき、 $H(e^{2\pi jf})$ は線形位相特性を持つと言う。

We say that $H(e^{2\pi jf})$ has a linear phase response if the group delay $\tau_g(f)$ is constant.

$H(e^{2\pi jf}) \neq 0$ を満たす f に対して、(For f satisfying $H(e^{2\pi jf}) \neq 0$,

$$H(e^{2\pi jf}) = e^{2\pi j(af+b)} |H(e^{2\pi jf})|, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

※通常の線形位相特性は、 $A(f)$ を実関数として、 $H(e^{2\pi jf}) = e^{2\pi j(af+b)} A(f)$ として定義される。

The linear phase response is usually defined via $H(e^{2\pi jf}) = e^{2\pi j(af+b)} A(f)$ for a real function $A(f)$.

線形位相特性 (Linear phase response)

定理 14.1 (Theorem 14.1)

$H_N(e^{2\pi jf})$ が線形位相特性を持つための必要十分条件は、 $h[n] = h[2N - n]$ である。特に、 $H_N(e^{2\pi jf}) \neq 0$ を満たす f に対して、

$H_N(e^{2\pi jf})$ has a linear phase response if and only if $h[n] = h[2N - n]$ holds. In particular, for f satisfying $H_N(e^{2\pi jf}) \neq 0$

$$H_N(e^{2\pi jf}) = e^{-2\pi j(Nf+k/2)} |H_N(e^{2\pi jf})|, \quad k \in \mathbb{Z}$$

証明 (Proof)

一般に (In general) $H_N(e^{2\pi jf}) = e^{-2\pi jF_N(f)} |H_N(e^{2\pi jf})|$

フィルタタップ $h[n]$ は実数なので、 $H_N(e^{-2\pi jf}) = \overline{H_N(e^{2\pi jf})}$ が成立する。

Since the filter tap $h[n]$ is real, we have $H_N(e^{-2\pi jf}) = \overline{H_N(e^{2\pi jf})}$.

$$\therefore |H_N(e^{-2\pi jf})| = |\overline{H_N(e^{2\pi jf})}| = |H_N(e^{2\pi jf})|$$

$H_N(e^{-2\pi jf}) = \overline{H_N(e^{2\pi jf})}$ から (From $H_N(e^{-2\pi jf}) = \overline{H_N(e^{2\pi jf})}$)

$$e^{-2\pi jF_N(-f)} = e^{2\pi jF_N(f)}$$

定理14.1の証明(Proof of Theorem 14.1)

$H_N(e^{2\pi jf})$ の定義を使うと、(Use the definition of $H_N(e^{2\pi jf})$.)

$$|H_N(e^{2\pi jf})| = e^{2\pi jF_N(f)} H_N(e^{2\pi jf}) = \sum_{n=0}^{2N} h[n] e^{-2\pi j\{nf - F_N(f)\}}$$

$e^{-2\pi jF_N(-f)} = e^{2\pi jF_N(f)}$ から(From $e^{-2\pi jF_N(-f)} = e^{2\pi jF_N(f)}$)

$$|H_N(e^{-2\pi jf})| = \sum_{n=0}^{2N} h[n] e^{2\pi j\{nf - F_N(f)\}} = \sum_{n'=0}^{2N} h[2N - n'] e^{2\pi j\{(2N - n')f - F_N(f)\}}$$

$|H_N(e^{-2\pi jf})| = |H_N(e^{2\pi jf})|$ を使うと、(Use $|H_N(e^{-2\pi jf})| = |H_N(e^{2\pi jf})|$.)

$$\sum_{n=0}^{2N} \{h[n] e^{2\pi jF_N(f)} - h[2N - n] e^{2\pi j\{2Nf - F_N(f)\}}\} e^{-2\pi jnf} = 0$$

十分性(Sufficiency)

$h[n] = h[2N - n]$ を仮定する。(Assume $h[n] = h[2N - n]$.)

$$\{e^{2\pi jF_N(f)} - e^{2\pi j\{2Nf - F_N(f)\}}\} \sum_{n=0}^{2N} h[n] e^{-2\pi jnf} = 0$$

定理14.1の証明(Proof of Theorem 14.1)

$H_N(e^{2\pi jf}) \neq 0$ を満たす f に対して、(For f satisfying $H_N(e^{2\pi jf}) \neq 0$,)

$$e^{2\pi jF_N(f)} = e^{2\pi j\{2Nf - F_N(f)\}}$$

よって(Thus)

$$F_N(f) = Nf + \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

必要性(Necessity)

$k \in \mathbb{Z}$ に対して $F_N(f) = Nf + k/2$ を仮定する。(Assume $F_N(f) = Nf + k/2$ for $k \in \mathbb{Z}$.)

$$e^{2\pi jNf} \sum_{n=0}^{2N} (e^{\pi jk} h[n] - e^{-\pi jk} h[2N - n]) e^{-2\pi jnf} = 0$$

$m = 0, \dots, 2N$ に対して $f = m/(2N + 1)$ に注目すると、上は $\{e^{\pi jk} h[n] - e^{-\pi jk} h[2N - n]\}$ の離散フーリエ変換が0であることを示している。離散フーリエ変換の可逆性から、

Focus on $f = m/(2N + 1)$ for $m = 0, \dots, 2N$. This equation implies that the discrete Fourier transform of $\{e^{\pi jk} h[n] - e^{-\pi jk} h[2N - n]\}$ vanishes. From the invertibility of the discrete Fourier transform,

$$h[n] = e^{-2\pi jk} h[2N - n] = h[2N - n]$$

■

素朴な設計方針(Naïve design criterion)

平均2乗誤差(Mean-square error, MSE)

$$J = \int_{-1/2}^{1/2} |H(e^{2\pi jf}) - e^{2\pi jNf} H_N(e^{2\pi jf})|^2 df$$

※線形位相特性を満たすための因子(Factor for the linear phase response)

MSE J が最小となるように、フィルタタップ $\{h[n]\}_{n=0}^{2N}$ を設計する。

Design the filter taps $\{h[n]\}_{n=0}^{2N}$ so as to minimize the MSE J .

定理14.2(Theorem 14.2)

$[-1/2, 1/2]$ 上で2乗可積分な $H(e^{2\pi jf})$ に対して、すべての $n = 0, \dots, 2N$ について $e^{2\pi jNf} h[n]$ を $H(e^{2\pi jf})$ の複素フーリエ係数 $c[n]$ に選ぶとき、 J は最小化される。

For any square-integrable $H(e^{2\pi jf})$ on the interval $[-1/2, 1/2]$, the MSE J is minimized when $e^{2\pi jNf} h[n]$ is set to the Fourier coefficient $c[n]$ for all $n = 0, \dots, 2N$.

$$c[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H(e^{2\pi jf}) e^{2\pi jnf} df$$

$$J \geq \int_{-1/2}^{1/2} |H(e^{2\pi jf})|^2 df - \sum_{n=0}^{2N} |c[n]|^2$$

等号成立は $h[n] = e^{-2\pi jNf} c[n]$

The equality holds for $h[n] = e^{-2\pi jNf} c[n]$.

定理14.2の証明(Proof of Theorem 14.2)

J に $H_N(e^{2\pi jf})$ の定義を代入すると、(Substitute the definition of $H_N(e^{2\pi jf})$ into J .)

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1/2}^{1/2} \left| H(e^{2\pi jf}) - e^{2\pi jNf} \sum_{n=0}^{2N} h[n] e^{-2\pi jnf} \right|^2 df \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} |H(e^{2\pi jf})|^2 df - e^{2\pi jNf} \sum_{n=0}^{2N} h[n] \int_{-1/2}^{1/2} \overline{H(e^{2\pi jf})} e^{-2\pi jnf} df \\ &\quad - e^{-2\pi jNf} \sum_{n=0}^{2N} \overline{h[n]} \int_{-1/2}^{1/2} H(e^{2\pi jf}) e^{2\pi jnf} df + \sum_{n,n'=0}^{2N} h[n] \overline{h[n']} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi j(n-n')f} df \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} |H(e^{2\pi jf})|^2 df - \sum_{n=0}^{2N} (e^{2\pi jNf} h[n] \overline{c[n]} + e^{-2\pi jNf} \overline{h[n]} c[n]) \\ &\quad + \sum_{n,n'=0}^{2N} h[n] \overline{h[n']} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi j(n-n')f} df \end{aligned}$$

$\because c[n]$ の定義より
Due to the definition of $c[n]$

定理14.2の証明(Proof of Theorem 14.2)

$n = n'$ に対して
For $n = n'$,

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi j(n-n')f} df = \int_{-1/2}^{1/2} df = 1$$

$n \neq n'$ に対して
For $n \neq n'$,

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi j(n-n')f} df &= 2 \int_0^{1/2} \cos\{2\pi(n-n')f\} df \\ &= \left[\frac{\sin\{2\pi(n-n')f\}}{\pi(n-n')} \right]_{f=0}^{f=1/2} = 0 \end{aligned}$$

よって(Thus,)

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1/2}^{1/2} |H(e^{2\pi jf})|^2 df + \sum_{n=0}^{2N} (|h[n]|^2 - e^{2\pi jNf} h[n] \overline{c[n]} - e^{-2\pi jNf} \overline{h[n]} c[n]) \\ &= \sum_{n=0}^{2N} |e^{2\pi jNf} h[n] - c[n]|^2 + \int_{-1/2}^{1/2} |H(e^{2\pi jf})|^2 df - \sum_{n=0}^{2N} |c[n]|^2 \\ &\geq \int_{-1/2}^{1/2} |H(e^{2\pi jf})|^2 df - \sum_{n=0}^{2N} |c[n]|^2 \end{aligned}$$

等号成立は $e^{2\pi jNf} h[n] = c[n]$
The equality holds for $e^{2\pi jNf} h[n] = c[n]$. ■

素朴な設計 (Naïve design)

理想的な低域通過フィルタ $H(e^{2\pi jf})$ の場合 (Case of the ideal low-pass filter)

$$h[n] = e^{-2\pi jNf} c[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H(e^{2\pi jf}) e^{2\pi j(n-N)f} df = \int_{-f_c}^{f_c} e^{2\pi j(n-N)f} df$$

$n = N$ に対して

For $n = N$,

$$h[N] = \int_{-f_c}^{f_c} df = 2f_c$$

$n \neq N$ に対して

For $n \neq N$,

$$\begin{aligned} h[n] &= 2 \int_0^{f_c} \cos\{2\pi(n-N)f\} df = \left[\frac{\sin\{2\pi(n-N)f\}}{\pi(n-N)} \right]_{f=0}^{f=f_c} \\ &= \frac{\sin\{2\pi(n-N)f_c\}}{\pi(n-N)} \end{aligned}$$

設計結果 (Design results)

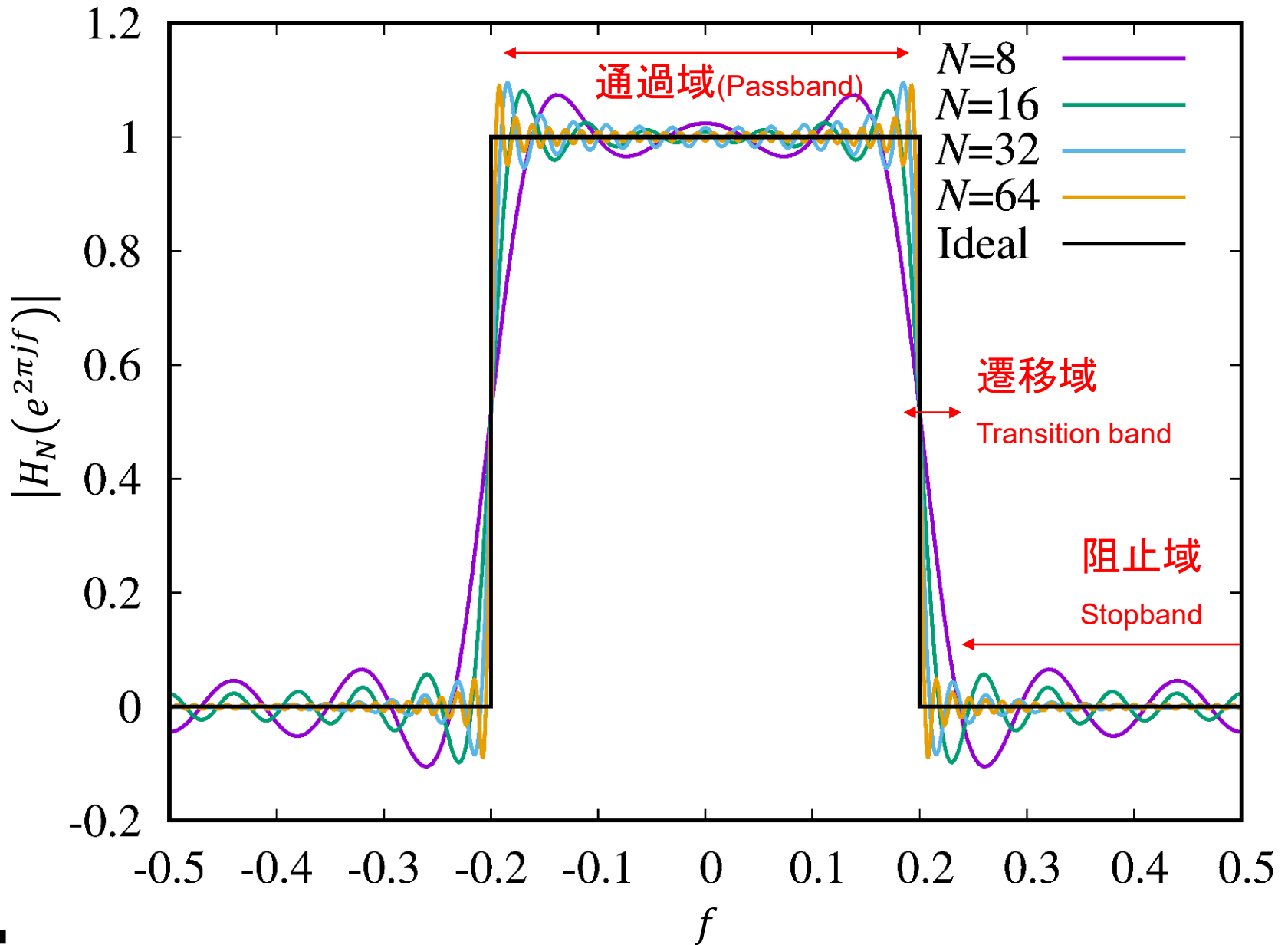
$$h[n] = 2f_c \operatorname{sinc}\{2f_c(n-N)\}$$

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \text{ for } x \neq 0$$

$$H_N(e^{2\pi jf}) = 2f_c e^{-2\pi jNf} \sum_{n=-N}^N \operatorname{sinc}(2f_c n) e^{-2\pi jnf}$$

$$\operatorname{sinc} 0 = 1$$

$f_c = 0.2$ に対するリップル(Ripples for $f_c = 0.2$)



用語の定義(Terminology)

通過域

Passband

信号が所望利得以上で通過できる周波数帯域

Frequency band in which signals pass under gain requirements.

遮断周波数

Cutoff frequency

振幅が通過域における振幅の $1/\sqrt{2}$ 倍になる周波数

Frequency at which the amplitude is $1/\sqrt{2}$ times the amplitude in passband.

阻止域

Stopband

信号の利得が所望値以下になる周波数帯域

Frequency band in which the gain of signals below a desired value.

阻止域端周波数

Stopband edge frequency

阻止域の端点における周波数

Frequency of edges in stopband

遷移域

Transition band

通過域でも阻止域でもない周波数帯域

Frequency band that is neither passband nor stopband.

窓関数法による設計(Design by windowing)

素朴な設計の問題点(Problem in the naïve design)

N を大きくしても、リップルがなくなる。(The ripples do not vanish as N increases.)

解釈(Interpretation)

素朴な設計は時間領域で矩形窓を使用している。 $w(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
The naïve design uses the rectangular window in time domain.

$$H(e^{2\pi jf}) \approx 2f_c e^{-2\pi jNf} \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{t+N}{2N}\right) \text{sinc}(2f_c t) e^{-2\pi jft} dt,$$

➡ 周波数領域では $2N \text{sinc}(2Nf)$ と $H(e^{2\pi jf})$ との畳み込みになる。
Becomes the convolution of $2N \text{sinc}(2Nf)$ and $H(e^{2\pi jf})$ in frequency domain.

窓関数法による設計(Design by windowing)

$w(t)$ を区間 $[0, 1]$ 上の時間窓として、(For a window function $w(t)$ on the time interval $[0, 1]$),

$$h[n] = e^{-2\pi jNf} w[n]c[n], \quad w[n] = w\left(\frac{n+N}{2N}\right)$$

窓関数法の解釈(Interpretation of windowing)

周波数窓 $W(e^{2\pi jf})$ に対して、 $h[n] = e^{-2\pi jNf} w[n]c[n]$ は以下の \tilde{j} を最小化する。

For a window function $W(e^{2\pi jf})$ in frequency domain, $h[n] = e^{-2\pi jNf} w[n]c[n]$ minimizes the following \tilde{j} :

$$\tilde{j} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{H}(f) - e^{2\pi jNf} H_N(e^{2\pi jf})|^2 df, \quad \tilde{H}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W(e^{2\pi jf'}) H(e^{2\pi j(f-f')}) df'$$

$$w[n] = \int_{-\infty}^{\infty} W(e^{2\pi jf}) e^{2\pi jnf} df = \int_{-1/2}^{1/2} W(e^{2\pi jf}) e^{2\pi jnf} df,$$

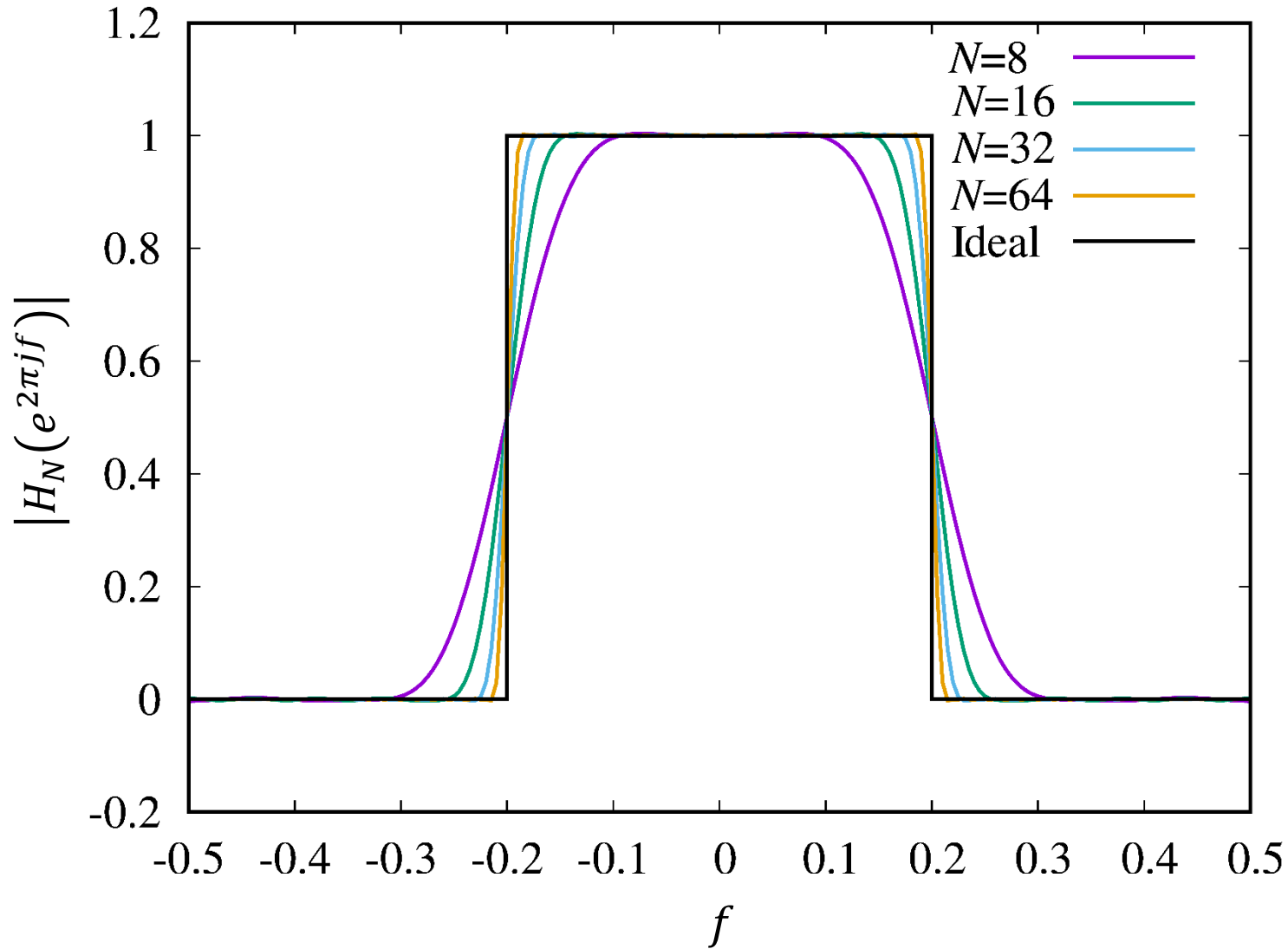
$$c[n] = \int_{-\infty}^{\infty} H(e^{2\pi jf}) e^{2\pi jnf} df = \int_{-1/2}^{1/2} H(e^{2\pi jf}) e^{2\pi jnf} df$$

証明(Proof) 定理14.2から、以下のフィルタタップは \tilde{j} を最小化する。

Theorem 14.2 implies that the following filter tap minimizes \tilde{j} .

$$\begin{aligned} e^{2\pi jNf} h[n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(f) e^{2\pi jnf} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{f} \int_{-\infty}^{\infty} df' W(e^{2\pi jf'}) H(e^{2\pi jf\tilde{f}}) e^{2\pi jn(f'+\tilde{f})} = w[n]c[n] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$f_c = 0.2$ に対するリップル(Ripples for $f_c = 0.2$)



ハミング窓(Hamming window) $w(t) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi t)$

演習(Exercises)

矩形窓を用いて、以下の周波数特性を持つFIRフィルタを設計せよ。

Design an FIR filter with the following frequency response by using the rectangular window.

$$H(e^{2\pi jf}) = 1 - 2|f| \text{ for } |f| \leq \frac{1}{2}$$