

信号解析論

Signal Processing

第15回講義資料

Lecture notes 15

デジタルフィルタの設計2

Design of digital filters 2

豊橋技術科学大学

Toyohashi University of Technology

電気・電子情報工学系

Department of Electrical and Electronic Information Engineering

准教授 竹内啓悟

Associate Professor Keigo Takeuchi

理想的低域通過フィルタの設計(Design of ideal low-pass filter)

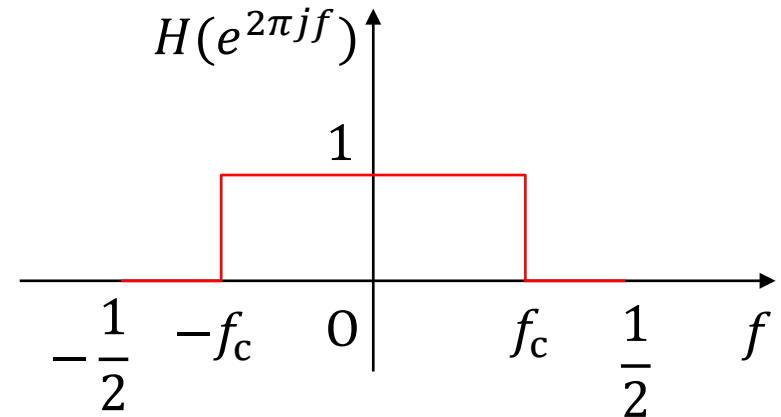
今日の目標(Today's goal)

以下の周波数特性を持つ理想的低域通過フィルタを設計する。

Design a digital filter that has the following ideal low-pass frequency response:

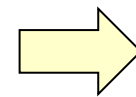
$$H(e^{2\pi jf}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |f| \leq f_c \\ 0 & \text{for } |f| \in (f_c, 1/2] \end{cases}$$

$f_c \in (0, 1/2]$: 遮断周波数(Cutoff frequency)



設計要求(Design requirements)

- 因果性(Causal)
- BIBO安定性(BIBO stability)
- 通過/阻止帯域リップル
Passband/Stopband ripples



IIRフィルタで設計する。

Use an IIR filter.

- 高速・低遅延(High speed and low latency)

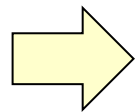
IIRフィルタの設計手順(Design flow of an IIR filter)

アナログプロトタイプ的设计(Design of an analog prototype filter)

設計要求を満たすアナログフィルタのラプラス変換 $\mathcal{H}(s)$ を設計する。

Design the Laplace transform $\mathcal{H}(s)$ of an analog filter satisfying the design requirements.

M 次のバターワースフィルタを用いる。(Use the M th-order Butterworth filter.)



$$\mathcal{H}_{\text{bw}}(s) = \prod_{m=0}^{M-1} \frac{2\pi f_c}{s - 2\pi f_c s_m}, \quad s_m = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2m+1}{2M}\right)}$$

因果性およびBIBO安定性を満たす。(The filter is causal and BIBO-stable.)

IIRフィルタのZ変換的设计(Design of the Z-transform of an IIR filter)

- インパルス不変法(Impulse invariant method)

フィルタタップがアナログインパルス応答のサンプル値となる。

The filter taps are obtained via sampling of the analog impulse response.

- 双線形変換法(Design via bilinear transform)

エイリアシングの発生を防ぐ。(Aliasing does not occur.)

バターワースフィルタの導出(Derivation of the Butterworth filter)

以下の周波数特性を持つバターワースフィルタを導出する。

Derive the Butterworth filter satisfying the follow frequency response:

$$|\mathcal{H}_{\text{bw}}(2\pi jf)| = \left\{ 1 + \left(\frac{f}{f_c} \right)^{2M} \right\}^{-1/2}$$

インパルス応答が実関数になるように、以下の対称性を課す。

Impose the following symmetry so as to make the impulse response be real.

$$\mathcal{H}_{\text{bw}}(-2\pi jf) = \overline{\mathcal{H}_{\text{bw}}(2\pi jf)}$$

$\mathcal{G}(2\pi jf) = \mathcal{H}_{\text{bw}}(2\pi jf)\mathcal{H}_{\text{bw}}(-2\pi jf)$ とおくと、(Let $\mathcal{G}(2\pi jf) = \mathcal{H}_{\text{bw}}(2\pi jf)\mathcal{H}_{\text{bw}}(-2\pi jf)$.)

$$\mathcal{G}(2\pi jf) = \mathcal{H}_{\text{bw}}(2\pi jf)\overline{\mathcal{H}_{\text{bw}}(2\pi jf)} = |\mathcal{H}_{\text{bw}}(2\pi jf)|^2 = \{1 + (f/f_c)^{2M}\}^{-1}$$

$s = 2\pi jf$ において、 $\mathcal{G}(2\pi jf)$ の定義域を拡張すると、

Let $s = 2\pi jf$ to extend the domain of $\mathcal{G}(2\pi jf)$.

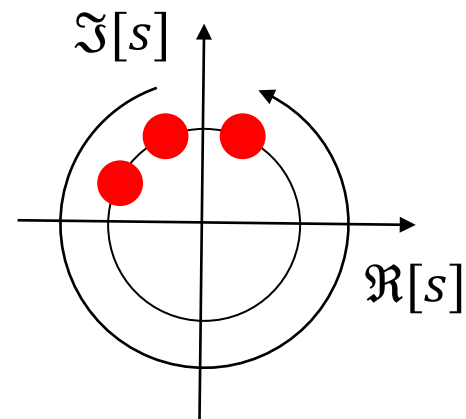
$$\mathcal{G}(s) = \left\{ 1 + \left(\frac{s}{2\pi jf_c} \right)^{2M} \right\}^{-1} = \frac{(-1)^M (2\pi f_c)^{2M}}{(-1)^M (2\pi f_c)^{2M} + s^{2M}}$$

バターワースフィルタの導出 (Derivation of the Butterworth filter)

$G(s)$ の極は以下で与えられる。(The poles of $G(s)$ are given by)

$$s^{2M} = (-1)^{M+1} (2\pi f_c)^{2M} = (2\pi f_c)^{2M} e^{j\pi(M+1)}$$

$$\therefore \frac{s}{2\pi f_c} = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2m+1}{2M}\right)} \equiv s_m \text{ for } m = 0, \dots, 2M - 1$$



$G(s)$ の極は角度 $\theta_0 = \pi\{1/2 + 1/(2M)\}$ から $\theta_{2M-1} = 2\pi + \pi\{1/2 - 1/(2M)\}$ まで半径 $2\pi f_c$ の円上に等間隔に並んでいる。

The poles of $G(s)$ are evenly spaced on a circle of radius $2\pi f_c$ from the angle $\theta_0 = \pi\{1/2 + 1/(2M)\}$ to $\theta_{2M-1} = 2\pi + \pi\{1/2 - 1/(2M)\}$.

$\mathcal{H}_{bw}(s)$ をBIBO安定にするために、左半平面にある極を $\mathcal{H}_{bw}(s)$ に割り当てる。

Allocate the poles on the left half-plane to $\mathcal{H}_{bw}(s)$ for the BIBO stability.

$$\mathcal{H}_{bw}(s) = \prod_{m=0}^{M-1} \frac{2\pi f_c}{s - 2\pi f_c s_m}, \quad \mathcal{H}_{bw}(-s) = \prod_{m=0}^{M-1} \frac{-2\pi f_c}{s + 2\pi f_c s_m} = \prod_{m=M}^{2M-1} \frac{-2\pi f_c}{s - 2\pi f_c s_m}$$

$$\therefore s_{m+M} = -s_m$$

この $\mathcal{H}_{bw}(s)$ は、 $G(s) = \mathcal{H}_{bw}(s)\mathcal{H}_{bw}(-s)$ を満たす。

This $\mathcal{H}_{bw}(s)$ satisfies $G(s) = \mathcal{H}_{bw}(s)\mathcal{H}_{bw}(-s)$. ■

インパルス不変法 (Impulse invariant method)

インパルス不変変換

Impulse invariant transform

$$\mathcal{H}(s) = \frac{a}{s - b} \quad \longrightarrow \quad H(z) = \frac{a}{1 - e^{bT} z^{-1}}$$

性質1 左半平面にある $\mathcal{H}(s)$ の極は、 $H(z)$ の単位円内にある極に変換される。

Property 1 Any pole of $\mathcal{H}(s)$ in the left half-plane is transformed into a pole of $H(z)$ in the open unit disk.

証明 $\Re[b] < 0$ とすると、 $H(z)$ の対応する極 $z = e^{bT}$ に対して、 $|z| = e^{\Re[b]T} < 1$

Proof Let $\Re[b] < 0$. For the corresponding pole $z = e^{bT}$ of $H(z)$, $|z| = e^{\Re[b]T} < 1$ ■

注意 $\mathcal{H}(s)$ がBIBO安定ならば、 $H(z)$ もBIBO安定である。

Remark If $\mathcal{H}(s)$ is BIBO-stable, $H(z)$ is BIBO-stable.

性質2 $\mathcal{H}(s)$ と $H(z)$ のインパルス応答をそれぞれ $h(t)$ と $h[n]$ とすると、

Property 2 Let $h(t)$ and $h[n]$ denote the impulse responses of $\mathcal{H}(s)$ and $H(z)$, respectively.

$$h[n] = h(nT)$$

証明(Proof) ラプラス変換表より (From the Laplace transform table,) $h(t) = ae^{bt}$,

$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ を用いると、(Use $(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.)

$$H(z) = a \sum_{n=0}^{\infty} (e^{bT} z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a e^{bnT} z^{-n}, \quad \therefore h[n] = h(nT) \quad \blacksquare$$

バターワースフィルタの場合 (Case of the Butterworth filter)

部分分数分解 (Partial fraction decomposition)

$$\mathcal{H}_{\text{bw}}(s) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{2\pi f_c a_m}{s - 2\pi f_c s_m}, \quad s_m = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2m+1}{2M}\right)}$$

$\mathcal{H}_{\text{bw}}(s)$ の極は、位数1ですべて異なるので、($\mathcal{H}_{\text{bw}}(s)$ only has distinct poles of order 1.)

$$a_m = \lim_{s \rightarrow 2\pi f_c s_m} \frac{s - 2\pi f_c s_m}{2\pi f_c} \mathcal{H}_{\text{bw}}(s) = \prod_{m' \neq m} \frac{1}{s_m - s_{m'}}$$

対称性 (Symmetry)

s_m の定義から、(From the definition of s_m .)

$$\frac{1}{s_{M-m-1}} = e^{-j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2M-2m-1}{2M}\right)} = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2m+1}{2M}\right)} = s_m$$

それゆえ (Thus)

$$a_{M-m-1} = \prod_{m' \neq M-m-1} \frac{1}{\overline{s_m} - s_{m'}} = \prod_{m' \neq m} \frac{1}{\overline{s_m} - s_{M-m'-1}} = \prod_{m' \neq m}^M \frac{1}{s_m - s_{m'}} = \overline{a_m}$$

バターワースフィルタの場合 (Case of the Butterworth filter)

M が偶数の場合

Case of even M

$$H_M(z) = \sum_{m=0}^{M/2-1} \left(\frac{2\pi f_c a_m}{1 - e^{2\pi f_c s_m T} z^{-1}} + \frac{2\pi f_c \bar{a}_m}{1 - e^{2\pi f_c \bar{s}_m T} z^{-1}} \right)$$

$$= 4\pi f_c \sum_{m=0}^{M/2-1} \frac{\Re[a_m] - \Re[\bar{a}_m e^{2\pi f_c s_m T}] z^{-1}}{1 - 2e^{2\pi f_c \Re[s_m]T} \cos(2\pi f_c \Im[s_m]T) z^{-1} + e^{4\pi f_c \Re[s_m]T} z^{-2}}$$

$\because \bar{e^z} = e^{\Re[z]} e^{-j\Im[z]} = e^{\bar{z}}$

M が奇数の場合 (Case of odd M)

$$H_M(z) = \frac{2\pi f_c a_{(M-1)/2}}{1 - e^{2\pi f_c s_{(M-1)/2} T} z^{-1}} + \sum_{m=0}^{(M-1)/2-1} \left(\frac{2\pi f_c a_m}{1 - e^{2\pi f_c s_m T} z^{-1}} + \frac{2\pi f_c \bar{a}_m}{1 - e^{2\pi f_c \bar{s}_m T} z^{-1}} \right)$$

$$= 4\pi f_c \sum_{m=0}^{(M-1)/2-1} \frac{\Re[a_m] - \Re[\bar{a}_m e^{2\pi f_c s_m T}] z^{-1}}{1 - 2e^{2\pi f_c \Re[s_m]T} \cos(2\pi f_c \Im[s_m]T) z^{-1} + e^{4\pi f_c \Re[s_m]T} z^{-2}}$$

$$+ \frac{2\pi f_c a_{(M-1)/2}}{1 - e^{-2\pi f_c T} z^{-1}},$$

$$a_{(M-1)/2} = \prod_{m=0}^{(M-1)/2-1} \frac{1}{(-1 - s_m)(-1 - \bar{s}_m)} = \prod_{m=0}^{(M-1)/2-1} \frac{1}{1 + 2\Re[s_m] + |s_m|^2}$$

IIRフィルタの時間領域表現 (Time-domain representation of the IIR filter)

$x[n]$ と $y[n]$ をIIRフィルタの入出力信号とする。

Let $x[n]$ and $y[n]$ denote the input and output signals of the IIR filter, respectively.

M が偶数の場合

Case of even M

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M/2-1} y_m[n],$$

$$y_m[n] = \alpha_m x[n] + \beta_m x[n-1] - \gamma_m y_m[n-1] - \delta_m y_m[n-2],$$

$$\alpha_m = 4\pi f_c \Re[a_m], \quad \beta_m = -4\pi f_c \Re[\overline{a_m} e^{2\pi f_c s_m T}],$$

$$\gamma_m = -2e^{2\pi f_c \Re[s_m]T} \cos(2\pi f_c \Im[s_m]T), \quad \delta_m = e^{4\pi f_c \Re[s_m]T}$$

M が奇数の場合

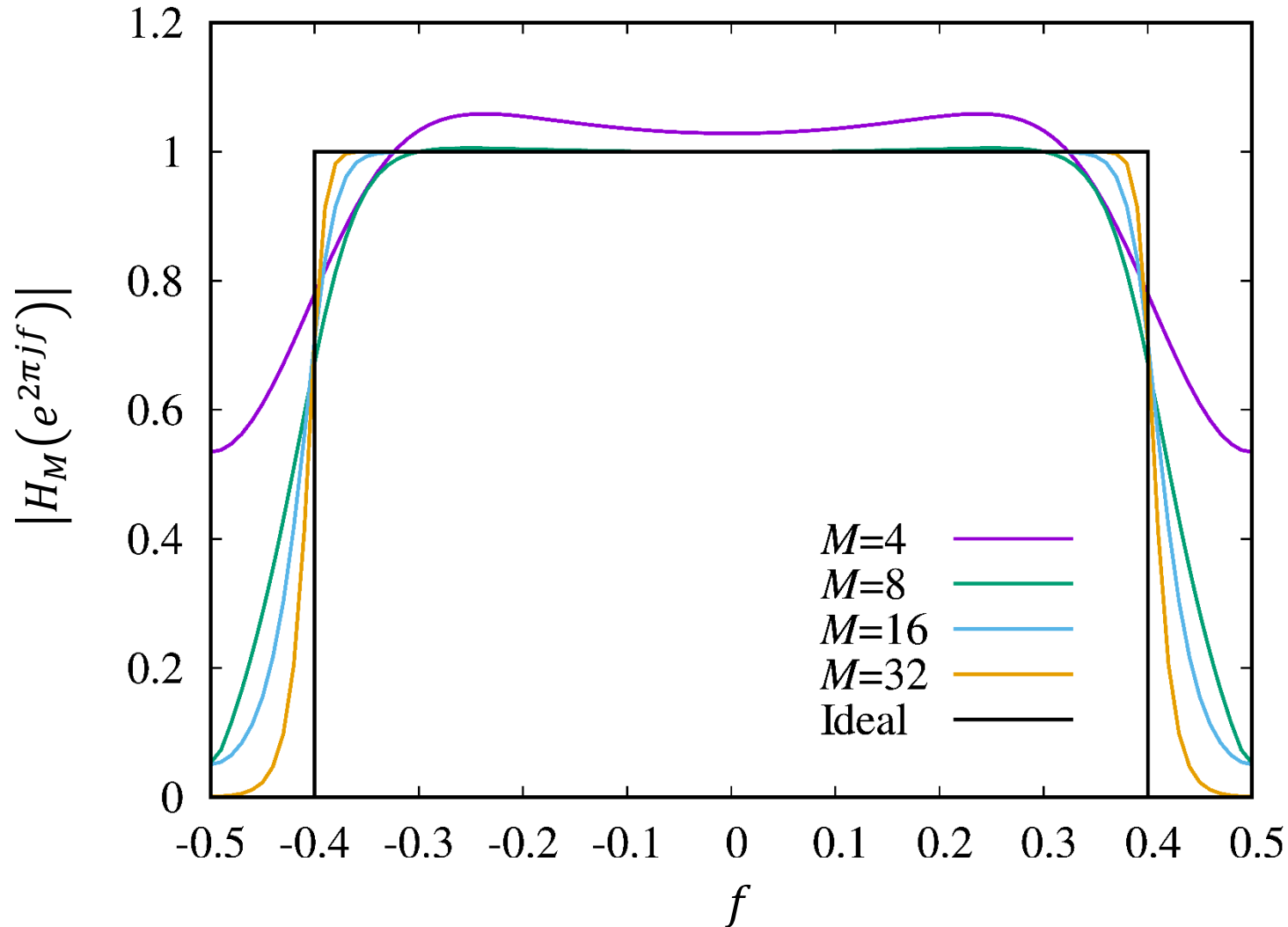
Case of odd M

$$y[n] = y_{(M-1)/2} + \sum_{m=0}^{(M-1)/2-1} y_m[n],$$

$$y_{(M-1)/2}[n] = \alpha_{(M-1)/2} x[n] - \gamma_{(M-1)/2} y_{(M-1)/2}[n-1],$$

$$\alpha_{(M-1)/2} = 2\pi f_c a_{(M-1)/2}, \quad \gamma_{(M-1)/2} = -e^{-2\pi f_c T}$$

$f_c = 0.4$ と $T = 1$ に対する周波数特性(Frequency response for $f_c = 0.4$ and $T = 1$)



バターワースフィルタは帯域制限されていないため、エイリアシングは不可避

Aliasing is inevitable because the band of the Butterworth filter is not limited.

双線形変換法(Design via bilinear transform)

双線形変換

Bilinear transform

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

※ (s, z^{-1}) は双線形方程式 $Ts + Tsz^{-1} - 2 + 2z^{-1} = 0$ の解
(s, z^{-1}) is a solution to the bilinear equation $Ts + Tsz^{-1} - 2 + 2z^{-1} = 0$

IIRフィルタ(IIR filter)

$$H(z) = \mathcal{H} \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

性質3(Property 3)

双線形変換は、単位円内から左半平面への一対一写像である。

The bilinear transform is the one-to-one mapping from the open unit disk onto the left half-plane.

証明

Proof

$$|z| < 1 \quad \longrightarrow \quad \Re[s] = \frac{2}{T} \Re \left[\frac{(1 - z^{-1})(1 + \bar{z}^{-1})}{|1 + z^{-1}|^2} \right] = \frac{2(1 - |z|^{-2})}{T|1 + z^{-1}|^2} < 0$$

さらに双線形変換は、次の逆写像を持つ。

Furthermore, the bilinear transform has the following inverse mapping.

$$z = \frac{2 + Ts}{2 - Ts} \quad \blacksquare$$

注意 $\mathcal{H}(s)$ がBIBO安定ならば、 $H(z)$ もBIBO安定である。

Remark If $\mathcal{H}(s)$ is BIBO-stable, $H(z)$ is BIBO-stable.

プリワーピング (Prewarping)

性質4 $\mathcal{H}(2\pi j f_a)$ と $H(e^{2\pi j f})$ の間には、以下の関係がある。

Property 4 $\mathcal{H}(2\pi j f_a)$ and $H(e^{2\pi j f})$ have the following relationship:

$$f_a = \frac{1}{\pi T} \tan \pi f$$

証明 双線形変換の定義から、

Proof From the definition of the bilinear transform,

$$2\pi j f_a = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-2\pi j f}}{1 + e^{-2\pi j f}}$$

$$f_a = \frac{1}{j\pi T} \frac{e^{\pi j f} - e^{-\pi j f}}{e^{\pi j f} + e^{-\pi j f}} = \frac{1}{\pi T} \frac{\sin \pi f}{\cos \pi f} = \frac{1}{\pi T} \tan \pi f \quad \blacksquare$$

プリワーピング (Prewarping)

IIRフィルタの遮断周波数が $f = f_c$ となるように、バターワースフィルタの遮断周波数を f_c^{pw} に事前に補正する。

Prewarp the cutoff frequency of the Butterworth filter to f_c^{pw} so that the cutoff frequency of the IIR filter is equal to $f = f_c$.

$$f_c^{\text{pw}} = \frac{1}{\pi T} \tan \pi f_c$$

IIRフィルタの性質(Properties of the IIR filter)

バターワースフィルタの周波数特性

Frequency response of the Butterworth filter

$$|\mathcal{H}_{\text{bw}}(2\pi j f_a)| = \left\{ 1 + \left(\frac{f_a}{f_c^{\text{pw}}} \right)^{2M} \right\}^{-1/2}$$

IIRフィルタの周波数特性

Frequency response of the IIR filter

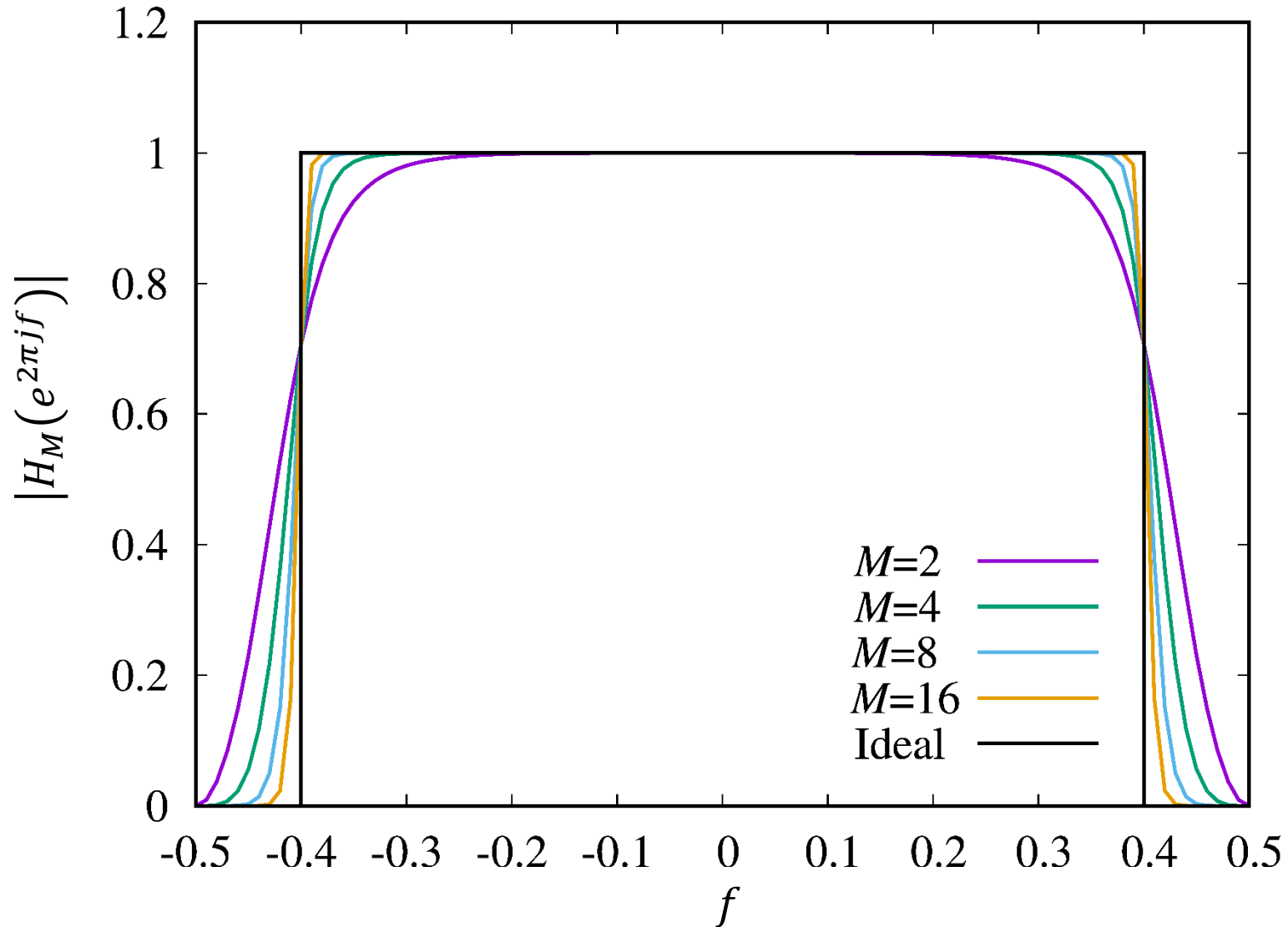
$$|H_M(e^{2\pi j f})| = \left\{ 1 + \left(\frac{1}{f_c^{\text{pw}} \pi T} \tan \pi f \right)^{2M} \right\}^{-1/2} = \left\{ 1 + \left(\frac{\tan \pi f}{\tan \pi f_c} \right)^{2M} \right\}^{-1/2}$$

IIRフィルタの時間領域表現

Time-domain representation of the IIR filter

省略(Omitted)

$f_c = 0.4$ と $T = 1$ に対する周波数特性(Frequency response for $f_c = 0.4$ and $T = 1$)



エイリアシングは発生しない。(Aliasing does not occur.)

演習(Exercises)

M 次のバターワースフィルタに基づき、双線形変換法によって設計したIIRフィルタの阻止域端周波数 f_{st} が、以下をみたすように次数 M を定めよ。

Via the bilinear transform, design an IIR filter based on the Butterworth filter with degree M . Determine the degree M such that the stopband edge frequency f_{st} of the IIR filter satisfies

$$f_{st} = 0.42, \quad |H_M(e^{2\pi j f_{st}})| \leq 10^{-1} \text{ for } f_c = 0.4$$