信号解析論
Signal Processing
第9回講義資料
Lecture notes 9
Z変換
Z-transform

豊橋技術科学大学
Toyohashi University of Technology
電気・電子情報工学系
Department of Electrical and Electronic Information Engineering
准教授　竹内啓悟
Associate Professor　Keigo Takeuchi

Z変換の定義(Definition of Z-transform)

両側Z変換

Bilateral Z-transform

離散時間信号$\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$のZ変換$X(z)$は、以下で定義される。

The Z-transform $X(z)$ of discrete-time signals $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ is defined as

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

片側Z変換

Unilateral Z-transform

離散時間信号$\{x[n]\}_{n=0}^{\infty}$のZ変換$X(z)$は、以下で定義される。

The Z-transform $X(z)$ of discrete-time signals $\{x[n]\}_{n=0}^{\infty}$ is defined as

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

収束域

Region of convergence

Z変換$X(z)$が絶対収束するzの集合

Set of z such that the Z-transform $X(z)$ is absolutely convergent.

$$\mathrm{ROC} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty \text{ or } 0}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty \right\}$$

※条件収束$|X(z)| < \infty$を用いる場合もある。

Conditional convergence might be used.

収束域(Region of convergence)

性質9.1 $n<0$に対して$x[n]=0$とする。ある$z_0\in\mathbb{C}$で$X(z)$が絶対収束するならば、

Property 9.1 Let $x[n]=0$ for $n<0$. If $X(z)$ is absolutely convergent at $z=z_0$, then

$$\{z\in\mathbb{C}: |z|\geq|z_0|\}\subset \mathrm{ROC}$$

証明(Proof) $|z|\geq|z_0|$に対して、(For $|z|\geq|z_0|$,)

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x[n]z^{-n}|=\sum_{n=0}^{\infty}|x[n]||z|^{-n}\leq\sum_{n=0}^{\infty}|x[n]||z_0|^{-n}<\infty \quad \blacksquare$$

性質9.2 $n>0$に対して$x[n]=0$とする。ある$z_0\in\mathbb{C}$で$X(z)$が絶対収束するならば、

Property 9.2 Let $x[n]=0$ for $n>0$. If $X(z)$ is absolutely convergent at $z=z_0$, then

$$\{z\in\mathbb{C}: |z|\leq|z_0|\}\subset \mathrm{ROC}$$

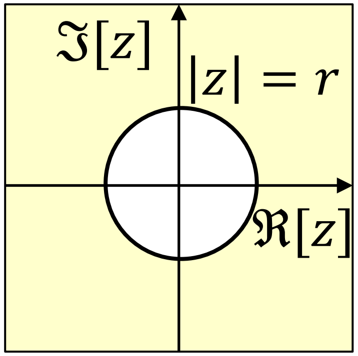
証明(Proof) 性質9.1の証明を繰り返せばよい。(Repeat the proof of Property 9.1.) $\blacksquare$

収束域

Region of convergence

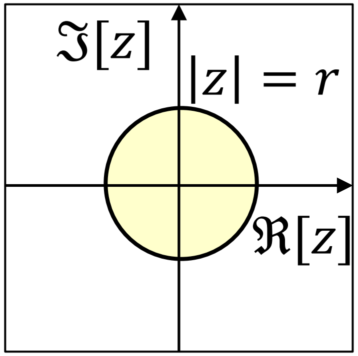
性質9.1

Property 9.1



性質9.2

Property 9.2



収束域(Region of convergence)

例9.1 $x[n]=2^n$の場合、収束域は存在しない。

Example 9.1 The region of convergence does not exist for $x[n]=2^n$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]||z|^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{2}{|z|}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{|z|}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|z|}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{|z|}\right)^n\to\infty \quad \blacksquare$$

例9.2 次の$x[n]$の収束域は、$1/4<|z|<1/2$である。

Example 9.2 The region of convergence is $1/4<|z|<1/2$ for the following:

$$x[n]=\begin{cases}4^{-n} & \text{for } n\geq 0,\\ 2^{-n} & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]||z|^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{-n}|z|^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}|z|^{-n},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{-n}|z|^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2|z|)^n=\frac{2|z|}{1-2|z|}\quad \text{for } |z|<\frac{1}{2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}|z|^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(4|z|)^{-n}=\frac{1}{1-1/(4|z|)}\quad \text{for } |z|>\frac{1}{4} \qquad \blacksquare$$

逆Z変換(Inverse Z-transform)

定理9.1(Theorem 9.1) $\{x[n]\}$のZ変換を$X(z)$とする。(Let $X(z)$ denote the Z-transform of $\{x[n]\}$.)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

$C \subset \mathrm{ROC}$は原点を囲む反時計回りの閉路であり、収束域上に存在する。

$C \subset \mathrm{ROC}$ is a counter-clockwise closed path encircling the origin and entirely in the region of convergence.

証明(Proof) $z = re^{j\omega}$とし、zが収束域に入るように$r > 0$を選ぶ。

Let $z = re^{j\omega}$ and select some $r > 0$ such that z is included in the region of convergence.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-jn\omega}$$

$\{x[n]r^{-n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$は$X(z)$を$\omega$に関して複素フーリエ級数展開したときのフーリエ係数とみなせる。

$\{x[n]r^{-n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ are regarded as the Fourier coefficients in the complex Fourier expansion of $X(z)$ with respect to ω.

$$x[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(re^{j\omega}\right)e^{jn\omega}d\omega$$

証明(Proof)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega}) r^n e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(z) z^n \, d\omega, \qquad z = re^{j\omega}$$

ωをzに変数変換すると、(Use the change of variables $z = re^{j\omega}$.)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\oint_{C_0} X(z) z^n \frac{dz}{jz} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_0} X(z) z^{n-1} dz \qquad \because \frac{dz}{d\omega} = jz$$

C_0は$z=-r$から反時計回りに円$|z|=r$上を進み、$z=-r$に到達する閉路である。

C_0 is the counter-clockwise closed path that runs on the circle $|z| = r$ from $z = -r$ to $z = -r$.

rの定義からC_0は収束域に含まれているため、複素関数の一般論から、
C_0は原点を囲む反時計回りの閉路$C \subset \mathrm{ROC}$に置き換えることができる。

The definition of r implies that C_0 is included into the region of convergence. Thus, a general theory in complex analysis allows us to replace C_0 with any counter-clockwise closed path C encircling the origin and entirely in the region of convergence. ■

注意(Remark)

Z変換は可逆という事実が重要で、逆変換公式は実際には使わない。

The point is the inversibility of the Z-transform while the inverse Z-transform is not used in computation.

Z変換の性質(Properties for the Z-transform)

性質9.3：線形性(Property 9.3: Linearity)

$\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$と$\{y[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$のZ変換をそれぞれ$X(z)$と$Y(z)$とすると、
和$\{x[n]+y[n]\}$のZ変換は以下となる。

Let $X(z)$ and $Y(z)$ denote the Z-transforms of $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ and $\{y[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$, respectively.
Then, the Z-transform of the sum $\{x[n]+y[n]\}$ is given by

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{x[n]+y[n]\}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]z^{-n}=X(z)+Y(z)$$

性質9.4：時間遅延 (Property 9.4: Time delay)

$\{x[n]\}$のZ変換を$X(z)$とすると、時間遅延$\{x[n-k]\}$のZ変換は以下となる。

Let $X(z)$ denote the Z-transform of $\{x[n]\}$. Then, the Z-transform of the time delay $\{x[n-k]\}$ is given by

両側

Bilateral

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-k]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-(n+k)}=z^{-k}X(z)$$

片側

Unilateral

$$\sum_{n=0}^{\infty}x[n-k]z^{-n}=\sum_{n=-k}^{\infty}x[n]z^{-(n+k)}=z^{-k}X(z)$$

when $x[n]=0$ for $n<0$.

畳み込み(Convolution)

$$(x * y)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n-m]$$

定理9.2(Theorem 9.2)

$\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$と$\{y[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$のZ変換をそれぞれ$X(z)$と$Y(z)$とする。畳み込み$\{(x * y)[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$のZ変換は、Z変換の積$X(z)Y(z)$に等しい。

Let $X(z)$ and $Y(z)$ denote the Z-transforms of $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ and $\{y[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$, respectively. Then, the Z-transform of the convolution $\{(x * y)[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ is equal to the product $X(z)Y(z)$.

証明(Proof)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x * y)[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n-m]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-m]z^{-(n-m)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = X(z)Y(z) \qquad \blacksquare$$

Z変換の例 (Properties for the Z-transform)

例9.3
Example 9.3

$$x[n] = \delta_{n,0} \equiv \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0} z^{-n} = 1$$

例9.4
Example 9.4

$$x[n] = \begin{cases} a^n & \text{for } n \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{for } |az^{-1}| < 1$$

例9.5
Example 9.5

$$x[n] = \begin{cases} n & \text{for } n \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$|z| > 1$に対して$1/(1-z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^n$の両辺を$z^{-1}$に関して微分すると、

Differentiate both sides of $1/(1-z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^n$ with respect to z^{-1} for $|z| > 1$.

$$\frac{1}{(1-z^{-1})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = z\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} \quad \therefore X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad \text{for } |z| > 1$$

s領域とz領域の関係(Relationship between s and z domains)

両側ラプラス変換(Bilateral Laplace transform)

十分に小さな$T_s > 0$に対して、(For sufficiently small $T_s > 0$,)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \approx T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](e^{sT_s})^{-n}, \qquad x[n] = x(nT_s)$$

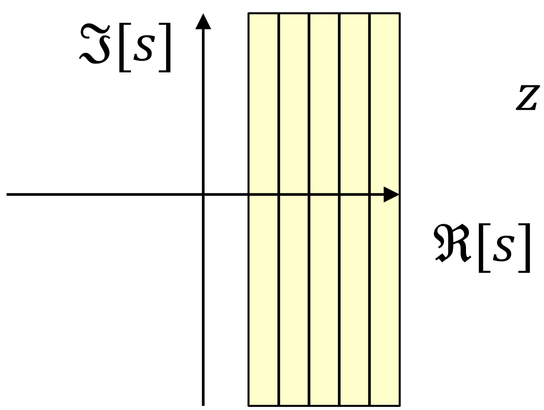
$t' = t/T_s$とおいて時間の単位を無次元化する。

Non-dimensionalize the unit of time by letting $t' = t/T_s$.

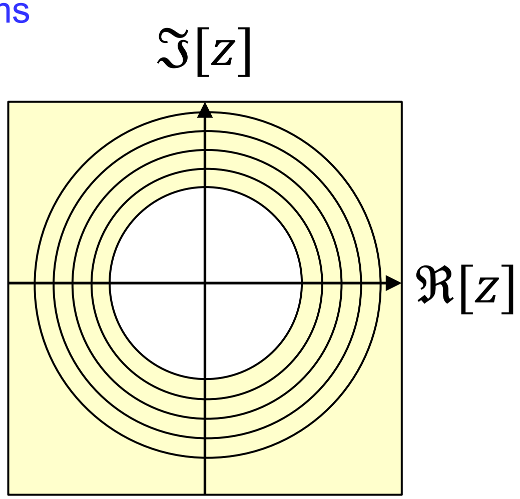
$\Rightarrow \quad T_s = 1$

ラプラス変換とZ変換の定義域の関係

Relationship between the domains of the Laplace and Z transforms



$$z = e^s = e^{\Re[s]}e^{j\Im[s]}$$



Z変換の応用(Application of the Z-transform)

線形時不変差分方程式(Linear and time-invariant difference equation)

以下の差分方程式を解け。(Solve the following difference equation:)

$$x[n] - 5x[n-1] + 6x[n-2] = \delta_{n,0}, \qquad x[n] = 0 \text{ for } n < 0$$

手順1(Step 1)　性質9.4を使って、両辺をZ変換する。

Use Property 9.4 to evaluate the Z-transforms of both sides.

$$X(z) - 5z^{-1}X(z) + 6z^{-2}X[z] = 1 \qquad \therefore\ X(z) = \frac{1}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}$$

手順2(Step 2)　部分分数分解を行う。(Compute the partial fraction decomposition.)

$$X(z) = \frac{1}{(1-3z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{A}{1-3z^{-1}} + \frac{B}{1-2z^{-1}} \qquad \therefore A = 3,\quad B = -2$$

手順3(Step 3)　Z変換表を使って逆変換する。(Compute the inverse via the Z-transform table.)

$$x[n] = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1} \ \text{ for } n \geq 0$$

演習(Exercises)

1. 以下の離散時間信号のZ変換と収束域を求めよ。
   Evaluate the Z-transform and the region of convergence for the following discrete-time signals:

$$u[n] = \begin{cases} e^{2\pi j f_c n} & \text{for } n \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. 以下の差分方程式を解け。(Solve the following difference equation:)

$$x[n] - 2x[n-1] = u[n], \qquad x[n] = 0 \text{ for } n < 0$$